# Бесконечно повторяющиеся радикалы Рамануджана.

В трудах выдающегося индийского математика Рамануджана были приведены оригинальные формулы:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}=3, \tag{1}$$

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}}=4. \tag{2}$$

Эти красивые формулы Рамануджан получил еще в школьные годы. Формулу (1) он получил следующим образом:

$$f(n)=n+2=\sqrt{1+(n+1)(n+3)}=\sqrt{1+(n+1)f(n+1)},$$

$$f(n+1)=n+3=\sqrt{1+(n+2)f(n+2)},$$

$$f(n+2)=n+4=\sqrt{1+(n+3)f(n+3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

затем последовательно подставил эти значения:

$$n+2=\sqrt{1+(n+1)\sqrt{1+(n+2)\sqrt{1+(n+3)\sqrt{1+\ldots}}}},$$

и положил $n=1$:

$$\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+4\sqrt{1+\ldots}}}}=3.$$

Аналогичный вывод получается для формулы (2):

$$f(n)=n+3=\sqrt{(n+5)+(n+1)(n+4)}=\sqrt{(n+5)+(n+1)f(n+1)},$$

$$f(n+1)=n+4=\sqrt{(n+6)+(n+2)f(n+2)},$$

$$f(n+2)=n+5=\sqrt{(n+7)+(n+3)f(n+3)},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

после последовательной подстановки:

$$n+3=\sqrt{(n+5)+(n+1)\sqrt{(n+6)+(n+2)\sqrt{(n+7)+(n+3)\sqrt{(n+8)+\ldots}}}},$$

и, наконец, при $n=1$:

$$\sqrt{6+2\sqrt{7+3\sqrt{8+4\sqrt{9+\ldots}}}}=4.$$

Вопрос о законности перехода к пределу Рамануджана не интересовал, однако в данном случае он очень важен. Мы можем написать

$$4=\sqrt{1+2\cdot\frac{15}{2}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\cdot\frac{221}{12}}}=\sqrt{1+2\sqrt{1+3\sqrt{1+\ldots}}},$$

и, таким образом получить, что выражение (1) равно 4.

Мне достаточно долго не удавалось найти статей со строгими доказательствами этих формул. Я даже думаю, что таких публикаций на русском языке нет. Совсем недавно я случайно нашёл статью [1], в которой был приведённый выше контрпример и строгое доказательство формулы (1). Я обобщил это доказательство так, чтобы оно подходило и для формулы (2). Более того, подставляя различные значения параметров, я получил новые формулы с бесконечно повторяющимися радикалами аналогичные формулам (1) и (2).

Рассмотренные выше две формулы с бесконечно повторяющимися радикалами являются частными случаями более общей формулы. А именно, справедлива следующая теорема.

**Теорема** *Пусть* $n$, $k$, $a \in [0, +\infty)$. *Тогда рекуррентное соотношение*

$$f_{k,a}(n) = \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k) f_{k,a}(n+k)}$$

*имеет единственное решение* $f_{k,a}(n) = n + 2k + a$.

**Замечание 1** *Для простоты мы будем писать* $f(n)$*, подразумевая при этом* $f_{k,a}(n)$*. Здесь* $k$ *и* $a$ *— некоторые параметры.*

**Замечание 2** *Нас будет интересовать теорема для целых неотрицательных чисел, хотя она справедлива для действительных неотрицательных чисел.*

**Замечание 3** *Рекуррентное соотношение из формулировки теоремы можно получить тем же способом, которым Рамануджан получил формулы (1) и (2). Пусть* $f(n) = n + 2k + a$*, тогда* $f(n)$ *можно представить в виде*

$$f(n) = n + 2k + a = \sqrt{(n+2k+a)^2} = \sqrt{[(n+k) + (k+a)]^2} =$$

$$= \sqrt{(n+k)^2 + 2(n+k)(k+a) + (k+a)^2} =$$

$$= \sqrt{(n+k)^2 + (k+a)(n+k) + k(n+k) + a(n+k) + (k+a)^2} =$$

$$= \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k)(n+k+k+a+k)} =$$

$$= \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k)[(n+k) + 2k + a]} = \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k) f(n+k)}.$$

**Доказательство**

$$n + 2k + a = \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k)(n+3k+a)} =$$

$$= \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k)\sqrt{a(n+2k) + (k+a)^2 + (n+2k)(n+4k+a)}} = \ldots =$$

$$= \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + \ldots + [n+(m-1)k]\sqrt{a(n+mk) + (k+a)^2 + (n+mk)[n+(m+2)k+a]}}.$$

*Обозначим:*

$$u_1 = 1,$$

$$u_2 = \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k)},$$

$$u_3 = \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k)\sqrt{a(n+2k) + (k+a)^2 + (n+2k)}},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

$$u_m = \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k)\sqrt{a(n+2k) + (k+a)^2 + \ldots + [n+(m-1)k]}}.$$

$\forall m \ u_{m+1} > u_m \Rightarrow$ *последовательность* $u_m$ *— монотонна.*

$$\forall m \ u_m = \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + (n+k)\sqrt{a(n+2k) + (k+a)^2 + \ldots + [n+(m-1)k]}} <$$

$$< \sqrt{a(n+k) + (k+a)^2 + \ldots + [n+(m-1)k]\sqrt{a(n+mk) + (k+a)^2 + (n+mk)[n+(m+2)k+a]}} =$$

$$= n + 2k + a. \Rightarrow \text{ последовательность } u_m \text{ — ограничена сверху.}$$

*Докажем, что последовательность $u_m$ имеет предел, равный $n+2k+a$. Достаточно доказать, что*

$$\forall \varepsilon > 0 \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m > N: \ u_m > n+2k+a-\varepsilon.$$

*Пусть $\varepsilon < n+2k+a$, тогда будут выполнены неравенства $0 < n+2k+a-\varepsilon < n+2k+a$. Обозначим $(n+2k+a)r = n+2k+a-\varepsilon$, тогда:*

$$0 < (n+2k+a)r = n+2k+a-\varepsilon < n+2k+a,$$

$$0 < r = 1 - \frac{\varepsilon}{n+2k+a} < 1.$$

*То есть нам надо доказать, что*

$$u_m > (n+2k+a)r,$$

$$u_m = \sqrt{a(n+k)+(k+a)^2+(n+k)\sqrt{a(n+2k)+(k+a)^2+\ldots+[n+(m-1)k]}} >$$

$$> r\sqrt{a(n+k)+(k+a)^2+\ldots+[n+(m-1)k]\sqrt{a(n+mk)+(k+a)^2+(n+mk)[n+(m+2)k+a]}} =$$

$$= (n+2k+a)r,$$

$$\sqrt{a(n+k)+(k+a)^2+(n+k)\sqrt{a(n+2k)+(k+a)^2+\ldots+[n+(m-1)k]}} >$$

$$> \sqrt{[a(n+k)+(k+a)^2]r^2+\ldots+[n+(m-1)k]r^{2^{m-1}}\sqrt{a(n+mk)+(k+a)^2+(n+mk)[n+(m+2)k+a]}}.$$

*Так как $1 > r$, то выполнены неравенства:*

$$1 > r^2,$$

$$1 > r^{2^2},$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots,$$

*Далее:*

$$r^{2^{m-1}}\sqrt{a(n+mk)+(k+a)^2+(n+mk)[n+(m+2)k+a]} = r^{2^{m-1}}\sqrt{[n+(m+1)k+a]^2} =$$

$$= r^{2^{m-1}}[n+(m+1)k+a].$$

*(Ведь $f(n+(m-1)k+a) = n+(m+1)k+a$).*

*Пусть $R = \dfrac{1}{r} > 1$. Тогда*

$$r^{2^{m-1}}[n+(m+1)k+a] = \frac{n+(m+1)k+a}{R^{2^{m-1}}} \leq \frac{n+(m+1)k+a}{R^m} = \frac{n+(m+1)k+a}{[1+(R-1)]^m} \leq$$

$$\leq \frac{n+(m+1)k+a}{1+R(m-1)+\frac{m(m-1)}{2}(R-1)^2} \xrightarrow[m\to\infty]{} 0.$$

*То есть*

$$\forall \varepsilon > 0 \ (\textit{в частности, при } \varepsilon = 1) \ \exists N \in \mathbb{N} \ \forall m > N: \ r^{2^{m-1}}[n+(m+1)k+a] < \varepsilon.$$

*При $\varepsilon = 1$:*

$$1 > r^{2^{m-1}}[n+(m+1)k+a].$$

Приведем примеры использования доказанной теоремы:

**Пример 1** $k = 1,\ a = 0.$

$$f(n) = n + 2 = \sqrt{1 + (n+1)f(n+1)} = \sqrt{1 + (n+1)\sqrt{1 + f(n+2)}} = \dots.$$

*После подстановки* $n = 1$*:*

$$3 = \sqrt{1 + 2\sqrt{1 + 3\sqrt{1 + 4\sqrt{1 + \dots}}}}.$$

**Пример 2** $k = 1,\ a = 1.$

$$f(n) = n + 3 = \sqrt{(n+5) + (n+1)f(n+1)} = \sqrt{(n+5) + (n+1)\sqrt{(n+6) + f(n+2)}} = \dots.$$

*После подстановки* $n = 1$*:*

$$4 = \sqrt{6 + 2\sqrt{7 + 3\sqrt{8 + 4\sqrt{9 + \dots}}}}.$$

**Пример 3** $k = 1,\ a = 2.$

$$f(n) = n + 4 = \sqrt{(2n+11) + (n+1)f(n+1)} = \sqrt{(2n+11) + (n+1)\sqrt{(2n+13) + f(n+2)}} = \dots.$$

*После подстановки* $n = 0$*:*

$$4 = \sqrt{11 + \sqrt{13 + 2\sqrt{15 + 3\sqrt{17 + \dots}}}}.$$

**Пример 4** $k = 1,\ a = 3.$

$$f(n) = n + 5 = \sqrt{(3n+19) + (n+1)f(n+1)} = \sqrt{(3n+19) + (n+1)\sqrt{(3n+22) + f(n+2)}} = \dots.$$

*После подстановки* $n = 0$*:*

$$5 = \sqrt{19 + \sqrt{22 + 2\sqrt{25 + 3\sqrt{28 + \dots}}}}.$$

# Литература.


[1] A. Herschfeld, On Infinite Radicals, American Mathematical Monthly **42** (1935), no. 7, 420–421.