

Наибольшее число людей может объединить только наименьший общий знаменатель.

Фридрих фон Хайек

**Определение.** Два простых числа, отличающиеся на 2, называются *простыми числами-близнецами*.

**8.1.** Докажите, что 3, 5 и 7 являются единственной тройкой простых чисел-близнецов.

**8.2.** Пусть  $p > 3$  — простое число. Докажите, что  $p^2 - 1$  делится на 24.

**8.3.** Докажите, что следующие дроби несократимы при всех натуральных значениях  $n$ : а)  $\frac{2n+13}{n+7}$ ; б)  $\frac{2n^2-1}{n+1}$ ; в)  $\frac{n^2-n+1}{n+1}$ .

**8.4.** При каких целых  $n$  дробь а)  $\frac{n^2+2n+4}{n^2+n+3}$ ; б)  $\frac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3}$  сократима?

**8.5.** Найдите  $\text{НОД}(\underbrace{1 \dots 1}_k, \underbrace{1 \dots 1}_m)$ .

**8.6.**  $a$  и  $b$  — натуральные числа. Известно, что  $a^2 + b^2$  делится на  $ab$ . Докажите, что  $a = b$ .

**8.7.** Докажите, что составное число  $n$  всегда имеет делитель, больший 1, но не больший  $\sqrt{n}$ .

**8.8.** Существуют ли а) 5; б) 6 простых чисел, образующих арифметическую прогрессию?

**8.9.** В прямоугольнике с целыми сторонами  $m$  и  $n$ , нарисованном на клетчатой бумаге, проведена диагональ. Через какое число узлов она проходит? На сколько частей эта диагональ делится линиями сетки?

Наибольшее число людей может объединить только наименьший общий знаменатель.

Фридрих фон Хайек

**Определение.** Два простых числа, отличающиеся на 2, называются *простыми числами-близнецами*.

**8.1.** Докажите, что 3, 5 и 7 являются единственной тройкой простых чисел-близнецов.

**8.2.** Пусть  $p > 3$  — простое число. Докажите, что  $p^2 - 1$  делится на 24.

**8.3.** Докажите, что следующие дроби несократимы при всех натуральных значениях  $n$ : а)  $\frac{2n+13}{n+7}$ ; б)  $\frac{2n^2-1}{n+1}$ ; в)  $\frac{n^2-n+1}{n+1}$ .

**8.4.** При каких целых  $n$  дробь а)  $\frac{n^2+2n+4}{n^2+n+3}$ ; б)  $\frac{n^3-n^2-3n}{n^2-n+3}$  сократима?

**8.5.** Найдите  $\text{НОД}(\underbrace{1 \dots 1}_k, \underbrace{1 \dots 1}_m)$ .

**8.6.**  $a$  и  $b$  — натуральные числа. Известно, что  $a^2 + b^2$  делится на  $ab$ . Докажите, что  $a = b$ .

**8.7.** Докажите, что составное число  $n$  всегда имеет делитель, больший 1, но не больший  $\sqrt{n}$ .

**8.8.** Существуют ли а) 5; б) 6 простых чисел, образующих арифметическую прогрессию?

**8.9.** В прямоугольнике с целыми сторонами  $m$  и  $n$ , нарисованном на клетчатой бумаге, проведена диагональ. Через какое число узлов она проходит? На сколько частей эта диагональ делится линиями сетки?