Есть странная особенность: если соединить между собой города Ростов, Таганрог, Шахты, получится треугольник.

Сергей Дружко

7.1. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Докажите, что угол KLD прямой.

7.2. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что:
а) треугольник AA_1C подобен треугольнику BB_1C;
б) треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C.

7.3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, X — середина диагонали AC. Оказалось, что $CD \parallel BX$. Найдите AD, если известно, что $BX = 3$, $BC = 7$, $CD = 6$.

7.4. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину отрезка CN, если длины катетов равны 1 и 4.

7.5. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Обозначим через G пересечение отрезков AC и EF; через H — пересечение отрезков AC и ED. Найдите площадь треугольника EGH.

7.6. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$ так, что вершины P и Q лежат на сторонах AB и AC, а вершины R и S — на стороне BC. Выразите длину стороны квадрата через сторону BC и высоту AH.

7.7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Площади треугольников AOB и COD равны. Найдите площадь AOB, если $AB = 13$, $BC = 10$, $CD = 15$, $DA = 24$.

7.8. Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

7.9. Прямая, проходящая через вершину A квадрата $ABCD$, пересекает сторону CD в точке E и прямую BC в точке F. Докажите, что

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$

> Есть странная особенность: если соединить между собой города Ростов, Таганрог, Шахты, получится треугольник.
>
> Сергей Дружко

7.1. Точка K — середина стороны AB квадрата $ABCD$, а точка L делит диагональ AC в отношении $AL : LC = 3 : 1$. Докажите, что угол KLD прямой.

7.2. Пусть AA_1 и BB_1 — высоты треугольника ABC. Докажите, что:
а) треугольник AA_1C подобен треугольнику BB_1C;
б) треугольник ABC подобен треугольнику A_1B_1C.

7.3. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, X — середина диагонали AC. Оказалось, что $CD \parallel BX$. Найдите AD, если известно, что $BX = 3$, $BC = 7$, $CD = 6$.

7.4. Вне прямоугольного треугольника ABC на его катетах AC и BC построены квадраты $ACDE$ и $BCFG$. Продолжение медианы CM треугольника ABC пересекает прямую DF в точке N. Найдите длину отрезка CN, если длины катетов равны 1 и 4.

7.5. Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Обозначим через G пересечение отрезков AC и EF; через H — пересечение отрезков AC и ED. Найдите площадь треугольника EGH.

7.6. В треугольник ABC вписан квадрат $PQRS$ так, что вершины P и Q лежат на сторонах AB и AC, а вершины R и S — на стороне BC. Выразите длину стороны квадрата через сторону BC и высоту AH.

7.7. Дан выпуклый четырёхугольник $ABCD$, O — точка пересечения диагоналей AC и BD. Площади треугольников AOB и COD равны. Найдите площадь AOB, если $AB = 13$, $BC = 10$, $CD = 15$, $DA = 24$.

7.8. Центр окружности ω лежит на окружности Ω, диаметр AB окружности Ω касается ω в точке C так, что $AC = 1$ и $BC = 16$. Найдите длину общей касательной к окружностям ω и Ω.

7.9. Прямая, проходящая через вершину A квадрата $ABCD$, пересекает сторону CD в точке E и прямую BC в точке F. Докажите, что

$$\frac{1}{AE^2} + \frac{1}{AF^2} = \frac{1}{AB^2}.$$