– Товарищи учёные! Доценты с кандидатами!
Замучились вы с иксами, запутались в нулях!
Сидите, разлагаете молекулы на атомы,
Забыв, что разлагается картофель на полях.

Владимир Высоцкий

20.1. Из произвольной точки описанной окружности опустили перпендикуляры на стороны треугольника. Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой (называемой прямой Симсона).

20.2. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N соответственно. P — точка пересечения MN и биссектрисы угла B (или её продолжения). Докажите, что **а)** $\angle BPC = 90°$; **б)** $S_{ABP} : S_{ABC} = 1 : 2$.

20.3. На дуге BC описанной окружности правильного треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $MA = MB + MC$.

20.4. На сторонах треугольника ABC построили внешним образом правильные треугольники ABC', ACB' и BCA'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке (называемой точкой Торричелли).

20.5. На сторонах треугольника ABC построили внешним образом треугольники ABC', ACB' и BCA', причём сумма углов при штрихованных вершинах кратна 180°. Докажите, что описанные вокруг этих трёх треугольников окружности пересекаются в одной точке.

20.6. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что их описанные окружности имеют общую точку (называемую точкой Микеля).

20.7. Из центра O окружности опущен перпендикуляр OA на прямую l. На прямой l взяты точки B и C так, что $AB = AC$. Через точки B и C проведены две секущие, первая из которых пересекает окружность в точках P и Q, а вторая — в точках M и N. Прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S соответственно. Докажите, что $AR = AS$.

– Товарищи учёные! Доценты с кандидатами!
Замучились вы с иксами, запутались в нулях!
Сидите, разлагаете молекулы на атомы,
Забыв, что разлагается картофель на полях.

Владимир Высоцкий

20.1. Из произвольной точки описанной окружности опустили перпендикуляры на стороны треугольника. Докажите, что основания этих перпендикуляров лежат на одной прямой (называемой прямой Симсона).

20.2. Вписанная окружность касается сторон AB и AC треугольника ABC в точках M и N соответственно. P — точка пересечения MN и биссектрисы угла B (или её продолжения). Докажите, что **а)** $\angle BPC = 90°$; **б)** $S_{ABP} : S_{ABC} = 1 : 2$.

20.3. На дуге BC описанной окружности правильного треугольника ABC взята точка M. Докажите, что $MA = MB + MC$.

20.4. На сторонах треугольника ABC построили внешним образом правильные треугольники ABC', ACB' и BCA'. Докажите, что прямые AA', BB' и CC' пересекаются в одной точке (называемой точкой Торричелли).

20.5. На сторонах треугольника ABC построили внешним образом треугольники ABC', ACB' и BCA', причём сумма углов при штрихованных вершинах кратна $180°$. Докажите, что описанные вокруг этих трёх треугольников окружности пересекаются в одной точке.

20.6. Четыре прямые образуют четыре треугольника. Докажите, что их описанные окружности имеют общую точку (называемую точкой Микеля).

20.7. Из центра O окружности опущен перпендикуляр OA на прямую l. На прямой l взяты точки B и C так, что $AB = AC$. Через точки B и C проведены две секущие, первая из которых пересекает окружность в точках P и Q, а вторая — в точках M и N. Прямые PM и QN пересекают прямую l в точках R и S соответственно. Докажите, что $AR = AS$.