На дне глубокого сосуда
Лежат спокойно n шаров,
Поочередно их оттуда
Таскают двое дураков.

Сие занятье им приятно,
Они таскают m минут
И, взявши шар, его обратно
В сосуд немедленно кладут.

Ввиду условия такого
Сколь вероятность велика,
Что первый был глупей второго,
Когда шаров он вынул k?

Виктор Скитович

18.1. Посчитайте суммы:
а) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$;
б) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n$.

18.2. При каких значениях n все коэффициенты в разложении бинома Ньютона $(a+b)^n$ нечётны?

18.3. **а)** "Чёртово колесо" состоит из p одинаковых кабинок (p — простое число). Каждую кабинку можно покрасить в один из n цветов. Сколько есть способов раскраски?
б) Выведите из предыдущего пункта, что $n^p - n$ делится на p при любом натуральном n и любом простом p.

18.4. Найдите у числа $(6+\sqrt{35})^{2024}$ первые 1000 знаков после запятой.

18.5. Докажите, что для любого натурального a найдётся такое натуральное n, что все числа $n+1$, n^n+1, $n^{n^n}+1, \ldots$ делятся на a.

18.6. Заданы натуральные числа n, m и k. Посчитайте число целочисленных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k,$$

в которых $0 \leqslant x_1, \ldots, x_n < m$.

На дне глубокого сосуда
Лежат спокойно n шаров,
Поочередно их оттуда
Таскают двое дураков.

Сие занятье им приятно,
Они таскают m минут
И, взявши шар, его обратно
В сосуд немедленно кладут.

Ввиду условия такого
Сколь вероятность велика,
Что первый был глупей второго,
Когда шаров он вынул k?

Виктор Скитович

18.1. Посчитайте суммы:
а) $C_n^0 - C_n^2 + C_n^4 - C_n^6 + \cdots$;
б) $C_n^1 + 2C_n^2 + 3C_n^3 + \cdots + nC_n^n$.

18.2. При каких значениях n все коэффициенты в разложении бинома Ньютона $(a+b)^n$ нечётны?

18.3. а) "Чёртово колесо" состоит из p одинаковых кабинок (p — простое число). Каждую кабинку можно покрасить в один из n цветов. Сколько есть способов раскраски?
б) Выведите из предыдущего пункта, что $n^p - n$ делится на p при любом натуральном n и любом простом p.

18.4. Найдите у числа $(6+\sqrt{35})^{2024}$ первые 1000 знаков после запятой.

18.5. Докажите, что для любого натурального a найдётся такое натуральное n, что все числа $n+1$, n^n+1, $n^{n^n}+1, \ldots$ делятся на a.

18.6. Заданы натуральные числа n, m и k. Посчитайте число целочисленных решений уравнения

$$x_1 + x_2 + \cdots + x_n = k,$$

в которых $0 \leqslant x_1, \ldots, x_n < m$.