Мардж, не хочу тебя пугать,
но, кажется, я тебя люблю…

Симпсоны

14.1. Докажите, что при $n \geqslant 2$ для любых значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеют место неравенства

$$|\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n \pm \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \cos\alpha_n| \leqslant 1.$$

14.2. Как n разбойникам поделить между собой добычу, чтобы каждый из них считал, что получил не менее $1/n$ от всей добычи?

14.3. Бизнесвумен заключила с нечистым такую сделку: она может любую имеющуюся у неё купюру обменять у нечистого на любой набор купюр меньшего достоинства (по своему выбору, без ограничения общей суммы). Она может также тратить деньги, но не может получать их в другом месте (кроме как у нечистого). При этом каждый день на шопинг ей требуются 100 тыс. рублей. Сможет ли она так жить бесконечно долго?

14.4. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет условиям

$$a_0 = 0; \quad a_1 \neq 0; \quad a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + a_{n+1}} \text{ при всех } n \geqslant 0.$$

Какие значения может принимать a_{2024}?

14.5. Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x + 1$, либо на $[x/2]$. Докажите, что если вначале написано число 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число.

14.6. Доказать, что $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$ при любом натуральном n.

14.7. Саша придумал новое умножение: $a \diamond b = 1/b + 1/a$. Вычислите

$$(\ldots((1 \diamond 2) \diamond 3) \ldots) \diamond 2025.$$

14.8. Имеется кучка из 100 камней. Двое играют в следующую игру. Первый игрок забирает 1 камень, потом второй может забрать 1 или 2 камня, потом первый может забрать 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня, и так далее. Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?

Мардж, не хочу тебя пугать,
но, кажется, я тебя люблю. . .

Симпсоны

14.1. Докажите, что при $n \geqslant 2$ для любых значений $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ имеют место неравенства

$$|\sin\alpha_1 \cdot \sin\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \sin\alpha_n \pm \cos\alpha_1 \cdot \cos\alpha_2 \cdot \ldots \cdot \cos\alpha_n| \leqslant 1.$$

14.2. Как n разбойникам поделить между собой добычу, чтобы каждый из них считал, что получил не менее $1/n$ от всей добычи?

14.3. Бизнесвумен заключила с нечистым такую сделку: она может любую имеющуюся у неё купюру обменять у нечистого на любой набор купюр меньшего достоинства (по своему выбору, без ограничения общей суммы). Она может также тратить деньги, но не может получать их в другом месте (кроме как у нечистого). При этом каждый день на шопинг ей требуются 100 тыс. рублей. Сможет ли она так жить бесконечно долго?

14.4. Последовательность $a_1, a_2, a_3, \ldots$ удовлетворяет условиям

$$a_0 = 0; \quad a_1 \neq 0; \quad a_{n+1} - a_n = \sqrt{a_n + a_{n+1}} \text{ при всех } n \geqslant 0.$$

Какие значения может принимать a_{2024}?

14.5. Любое число x, написанное на доске, разрешается заменить либо на $3x+1$, либо на $[x/2]$. Докажите, что если вначале написано число 1, то такими операциями можно получить любое натуральное число.

14.6. Доказать, что $1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \cdots + \frac{1}{n^2} < 2$ при любом натуральном n.

14.7. Саша придумал новое умножение: $a \diamond b = 1/b + 1/a$. Вычислите

$$(\ldots((1 \diamond 2) \diamond 3) \ldots) \diamond 2025.$$

14.8. Имеется кучка из 100 камней. Двое играют в следующую игру. Первый игрок забирает 1 камень, потом второй может забрать 1 или 2 камня, потом первый может забрать 1, 2 или 3 камня, затем второй 1, 2, 3 или 4 камня, и так далее. Выигрывает тот, кто забирает последний камень. Кто может выиграть, как бы ни играл соперник?