

Никогда вопросов глупых
Сам себе не задавай,
А не то ещё глупее
Ты найдёшь на них ответ.
Если глупые вопросы
Появились в голове,
Задавай их сразу взрослым.
Пусть у них трещат мозги.

Григорий Остер

10.1. Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами p и q . Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p + q$?

10.2. Существует ли на координатной плоскости точка, относительно которой симметричен график функции $f(x) = \frac{1}{2^x + 1}$?

10.3. Каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ определена на всей числовой прямой и не является строго монотонной. Может ли быть, что и их сумма, и их разность строго монотонны на всей числовой прямой?

10.4. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, график которых

- а) симметричен относительно двух вертикальных прямых;
- б) симметричен относительно вертикальной прямой и точки;
- в) симметричен относительно двух точек.

10.5. Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен, про который известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что тогда и уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

10.6. Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Известно, что для любой пары чисел $x > y$ справедливо неравенство $(f(x))^2 \leq f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в отрезке $[0, 1]$.

10.7. Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций $y = 2a + \frac{1}{x - b}$ и $y = 2c + \frac{1}{x - d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y = 2b + \frac{1}{x - a}$ и $y = 2d + \frac{1}{x - c}$ также имеют ровно одну общую точку.

Никогда вопросов глупых
Сам себе не задавай,
А не то ещё глупее
Ты найдёшь на них ответ.
Если глупые вопросы
Появились в голове,
Задавай их сразу взрослым.
Пусть у них трещат мозги.

Григорий Остер

10.1. Две параболы с различными вершинами являются графиками квадратных трёхчленов со старшими коэффициентами p и q . Известно, что вершина каждой из парабол лежит на другой параболе. Чему может быть равно $p + q$?

10.2. Существует ли на координатной плоскости точка, относительно которой симметричен график функции $f(x) = \frac{1}{2^x + 1}$?

10.3. Каждая из функций $f(x)$ и $g(x)$ определена на всей числовой прямой и не является строго монотонной. Может ли быть, что и их сумма, и их разность строго монотонны на всей числовой прямой?

10.4. Найдите все функции $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, график которых

- а) симметричен относительно двух вертикальных прямых;
- б) симметричен относительно вертикальной прямой и точки;
- в) симметричен относительно двух точек.

10.5. Пусть $f(x)$ — некоторый многочлен, про который известно, что уравнение $f(x) = x$ не имеет корней. Докажите, что тогда и уравнение $f(f(x)) = x$ не имеет корней.

10.6. Дана функция $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$. Известно, что для любой пары чисел $x > y$ справедливо неравенство $(f(x))^2 \leq f(y)$. Докажите, что множество значений функции содержится в отрезке $[0, 1]$.

10.7. Для заданных значений a, b, c и d оказалось, что графики функций $y = 2a + \frac{1}{x - b}$ и $y = 2c + \frac{1}{x - d}$ имеют ровно одну общую точку. Докажите, что графики функций $y = 2b + \frac{1}{x - a}$ и $y = 2d + \frac{1}{x - c}$ также имеют ровно одну общую точку.