

1.0. В ряд стоят 8 лампочек. Одним действием можно изменить состояние (вкл/выкл) идущих подряд 4 или 7 лампочек. Верно ли, что такими действиями можно получить любое состояние?

Решение. Всего состояний 2^8 . Вариантов действий: 5 из четырёх лампочек и 2 из семи, всего 7, их комбинаций 2^7 , что меньше 2^8 . Поэтому не все состояния удастся получить.

1.1. Есть таблица 10×10 , изначально заполненная нулями. Разрешается прибавить по 1 ко всем числам любого квадрата 4×4 или 5×5 .

а) Докажите, что существует расстановка остатков по модулю 2, которую такими операциями получить не удастся.

б) Докажите, что существует расстановка остатков по модулю 7, которую такими операциями получить не удастся.

1.2. В ряд стоят 9 лампочек. Одним действием можно изменить состояние идущих подряд 4 или 7 лампочек. Верно ли, что такими действиями можно получить любое состояние?

- *В следующих задачах.* На табло есть N лампочек и несколько кнопок. Каждая кнопка соединена с некоторыми лампочками (одна лампочка может быть присоединена к нескольким кнопкам). Нажатие на кнопку меняет состояние всех присоединённых к ней лампочек.

1.3. Докажите, что если лампочек меньше, чем кнопок, то есть кнопка, которую можно не использовать для получения всевозможных доступных узоров.

1.4. Пусть кнопка входит в такой набор кнопок, что каждая лампочка подсоединена к чётному количеству кнопок этого набора. Докажите, что тогда эту кнопку можно не использовать для получения всевозможных узоров.

1.5. Докажите, что количество узоров, которые можно получить нажатием кнопок, есть степень двойки.

1.6. Пусть кнопок столько же, сколько и лампочек. Оказалось, что для любого набора кнопок существует лампочка, соединённая с нечётным количеством кнопок из этого набора. Докажите, что тогда можно зажечь любой узор.