Пусть требуется доказать утверждение вида: «Для каждого натурального n верно, что...». Это всё равно, что доказать бесконечную цепочку утверждений «Для $n=1$ верно, что...», «Для $n=2$ верно, что...», ..., «Для $n=3799$ верно, что...» и так далее.

Метод математической индукции *состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое* ***базой индукции****), а затем доказать* ***шаг*** *(или* ***переход****): «Если верно утверждение №n, то верно утверждение №$(n+1)$». Если верны база индукции и шаг индукции, то все утверждения верны.*

4.1. Докажите, что при всех $x > -1$ и для любого натурального числа n выполняется *неравенство Бернулли*: $(1+x)^n \geqslant 1+nx$.

4.2. В одной небольшой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

4.3. Последовательность (a_n) такова, что $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, а каждый следующий элемент равен среднему арифметическому всех предыдущих: $a_{n+1} = \dfrac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Найдите значение элемента a_{2026}.

4.4. Докажите, что для любого натурального числа n

а) $10^n + 18n - 1 \vdots 27$ **б)** $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} \vdots 17$

4.5. Значение числа x выбрано таким образом, что $x + \dfrac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что число $x^n + \dfrac{1}{x^n}$ при любом целом n тоже является целым.

4.6. Захватив добычу, n разбойников пытаются её поделить. У каждого из них своё мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $\dfrac{1}{n}$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками для случая:

а) $n = 2$;

б) $n = 3$;

в) произвольного $n > 2$.

4.7. Докажите, что для любых натуральных n

а) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$; **б*)** $(2!)\cdot(4!)\cdot\ldots\cdot(2n)! \geqslant \big((n+1)!\big)^n$

4.8. **а)** На сколько частей делят плоскость n прямых «общего положения», то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

б*) На сколько частей делят пространство n плоскостей «общего положения»? И что это за «общее положение»?