Целые числа[1] $a$ и $b$ называются сравнимыми по модулю $n$ (обозначается $a \equiv b \pmod{n}$) если разность $a - b$ делится на $n$. Нетрудно убедиться (проверьте!), что утверждение $a - b \vdots n$ равносильно тому, что $a$ и $b$ дают при делении на $n$ одинаковые остатки.

Не следует путать обозначение отношения сравнимости по модулю ($a \equiv b \pmod{n}$) с операцией взятия остатка от деления: $a \mod n$ — это такое натуральное число $r$, что $0 \leqslant r < n$ и для некоторого целого числа $k$ выполняется равенство $a = kn + r$.

Пусть $a \equiv b \pmod{n}$, $c \equiv d \pmod{n}$. Тогда выполнены следующие свойства:

- $a \pm c \equiv b \pm d \pmod{n}$ (сравнения можно складывать и вычитать)
- $ac \equiv bd \pmod{n}$ (сравнения можно умножать)
- $a^k \equiv b^k \pmod{n}$ (сравнения можно возводить в степень)

Кроме того, если НОД$(k, n) = 1$, то из $ak \equiv bk \pmod{n}$ следует, что $a \equiv b \pmod{n}$, то есть сравнения можно сокращать на число, взаимно простое с модулем.

**14.1.** Убедитесь в том, что Вы понимаете определение сравнимости по модулю и доказательства вышеперечисленных свойств. Как именно в доказательстве возможности сокращения сравнения $ak \equiv bk \pmod{n}$ на число $k$ используется условие НОД$(k, n) = 1$? Приведите пример, показывающий, что без этого условия данное утверждение будет неверно.

**14.2.** Пусть $k \neq 0$. Докажите, что если $ka \equiv kb \pmod{kn}$, то $a \equiv b \pmod{n}$.
*Свойства сравнимости по модулю позволяют в некоторых случаях заменять в формуле число на сравнимое с ним по модулю $n$ (в частности, на остаток от деления числа на $n$). Однако не следует забывать о том, откуда это следует, чтобы случайно не сделать такую замену там, где этого делать нельзя.*

**14.3.** Найдите остаток от деления: **а)** $8^{100}$ на 7; **б)** $8^{100}$ на 9; **в)** $8^{2025}$ на 11.

**14.4.** **а)** Может ли число $\frac{n^2+1}{3}$ быть целым при натуральных $n$?

**б)** Целые числа $a, b$ и $c$ таковы, что $a^3 + b^3 + c^3 \vdots 7$. Докажите,что $abc \vdots 7.$

**14.5.** Найдите остаток от деления числа $\left(13^{14} + 15^{16}\right)^{17} + 18^{19^{20}}$ на $7$.

**14.6.** Докажите, что $8^{101} + 8^{102} + \ldots + 8^{107} \equiv 0 \pmod{7}$.

**14.7.** Докажите, что число $2222^{5555} + 5555^{2222}$ кратно $7$.

**14.8.** Найдите последнюю цифру числа $7^{7^{7^{7}}}$.

**14.9.** Докажите, что $5^n + 1$ не делится на $5^m - 1$ ни при каких натуральных $n$ и $m$.

**14.10.** Решите сравнение $3x \equiv 11 \pmod{101}$. *(Указание. Воспользуйтесь алгоритмом Евклида с предыдущего занятия)*

[1] В этом листке все числа считаются целыми. Напомним, что целое число может быть и отрицательным (если не оговорено отдельно, что оно натуральное).