Пусть прямая $\boldsymbol{l}$ проходит через точку $\boldsymbol{P}$ и пересекает окружность $\boldsymbol{\Omega}$ в точках $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. Из подобия треугольников несложно вывести, что произведение $\boldsymbol{PA \cdot PB}$ не зависит от выбора прямой $\boldsymbol{l}$. Эта величина, взятая со знаком «+» для точки вне круга, и со знаком «-» для точки внутри, обозначается $\mathbf{deg}(\boldsymbol{P}, \boldsymbol{\Omega})$ и называется *степенью точки* $\boldsymbol{P}$ *относительно окружности* $\boldsymbol{\Omega}$. Степень точки, лежащей на окружности, относительно этой окружности, считается равной нулю.

Степень точки $\boldsymbol{P}$, лежащей вне круга, равна квадрату отрезка касательной, проведённой из точки $\boldsymbol{P}$ к окружности. Верно и обратное: если $\boldsymbol{K \in \Omega}$ и $\boldsymbol{PK^2 = \mathbf{deg}(P, \Omega)}$, то $\boldsymbol{PK}$ — касательная.

Пусть $\boldsymbol{\Omega_1}$ и $\boldsymbol{\Omega_2}$ — две неконцентрические окружности. Тогда геометрическое место точек, имеющих одинаковую степень относительно обеих окружностей — это прямая, перпендикулярная линии, соединяющей их центры. Она называется *радикальной осью* двух окружностей. Радикальная ось двух пересекающихся окружностей проходит через их точки пересечения (т.к. степень каждой из них относительно каждой из двух окружностей равна нулю).

Пусть центры трёх окружностей не лежат на одной прямой. Их попарно взятые радикальные оси пересекаются в одной точке, называемой *радикальным центром* этих окружностей.

12.1. Две окружности пересекаются в точках $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$. $\boldsymbol{MN}$ — общая касательная к ним ($\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$ — точки касания). Докажите, что прямая $\boldsymbol{AB}$ делит отрезок $\boldsymbol{MN}$ пополам.

12.2. В параллелограмме $\boldsymbol{ABCD}$ диагональ $\boldsymbol{AC}$ больше диагонали $\boldsymbol{BD}$. $\boldsymbol{M}$ — такая точка на диагонале $\boldsymbol{AC}$, что четырёхугольник $\boldsymbol{BCDM}$ вписанный. Докажите, что прямая $\boldsymbol{BD}$ является общей касательной к описанным окружностям треугольников $\boldsymbol{ABM}$ и $\boldsymbol{ADM}$.

12.3. **а)** Даны окружность $\boldsymbol{\Omega}$ и точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ вне её. Для каждой прямой $\boldsymbol{l}$, проходящей через точку $\boldsymbol{A}$ и пересекающей окружность $\boldsymbol{\Omega}$ в точках $\boldsymbol{M}$ и $\boldsymbol{N}$, рассмотрим описанную окружность треугольника $\boldsymbol{BMN}$. Докажите, что *в большинстве случаев* все эти окружности имеют общую точку, отличную от точки $\boldsymbol{B}$. **б)** Укажите случай, когда утверждение предыдущего пункта становится неверным. Объясните, почему это происходит.

12.4. Даны окружность $\boldsymbol{\Omega}$, точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ на ней и точка $\boldsymbol{C}$ хорды $\boldsymbol{AB}$. Для каждой окружности $\boldsymbol{\Omega'}$, касающейся хорды $\boldsymbol{AB}$ в точке $\boldsymbol{C}$ и пересекающей окружность $\boldsymbol{\Omega}$ в точках $\boldsymbol{P}$ и $\boldsymbol{Q}$, рассмотрим точку $\boldsymbol{M}$ пересечения прямых $\boldsymbol{AB}$ и $\boldsymbol{PQ}$. Докажите, что положение точки $\boldsymbol{M}$ не зависит от выбора окружности $\boldsymbol{\Omega'}$.

12.5. Даны две неконцентрические окружности $\boldsymbol{\Omega_1}$ и $\boldsymbol{\Omega_2}$. Докажите, что геометрическое место центров окружностей, пересекающих обе эти окружности под прямым углом[1], является их радикальная ось, из которой (если данные окружности пересекаются) выброшена их общая хорда.

12.6. На сторонах $\boldsymbol{BC}$ и $\boldsymbol{AC}$ треугольника $\boldsymbol{ABC}$ взяты точки $\boldsymbol{A'}$ и $\boldsymbol{B'}$, $\boldsymbol{l}$ — прямая, проходящая через общие точки окружностей с диаметрами $\boldsymbol{AA'}$ и $\boldsymbol{BB'}$. Докажите, что прямая $\boldsymbol{l}$ проходит через ортоцентр треугольника $\boldsymbol{ABC}$.

[1] То есть таких, что под прямым углом пересекаются их касательные в точках пересечения