Обозначения:

- A, B, C — вершины треугольника, a, b, c — длины сторон напротив этих вершин.
- $p = \dfrac{a+b+c}{2}$ — полупериметр, S — площадь треугольника ABC.
- O и R — центр и радиус описанной окружности треугольника ABC
- I и r — центр и радиус вписанной окружности треугольника ABC
- I_A и r_A, I_B и r_B, I_C и r_C — центры и радиусы вневписанных окружностей, касающихся сторон a, b и соответственно.

11.1. Окружность с центром D проходит через вершины A, B и центр I_A вневписанной окружности треугольника ABC, касающейся его стороны BC и продолжений сторон AB и AC. Докажите, что точки A, B, C и D лежат на одной окружности.

11.2. Докажите, что произведение расстояний от вершины треугольника до центра вписанной окружности и до центра соответствующей этой вершине вневписанной окружности равно произведению сторон треугольника, сходящихся в этой вершине: $AB \cdot AC = AI \cdot AI_A$.

11.3. Дан угол с вершиной A, точка X внутри него и отрезок длины P. Циркулем и линейкой постройте прямую l, проходящую через точку X таким образом, что периметр треугольника ABC, где B и C — точки пересечения прямой l со сторонами угла, был равен P.

11.4. Докажите, что

а) $r_A \cdot r_B \cdot r_C = p \cdot S$

б) $S^2 = r \cdot r_A \cdot r_B \cdot r_C$

11.5. Докажите, что $AI \cdot AI_A = AI_B \cdot AI_C$

11.6(Теорема Мансиона). Докажите, что отрезок II_A, соединяющий центры вписанной и вневписанной окружностей треугольника ABC, делится описанной окружностью пополам. *Указание: рассмотрите точку M — середину отрезка II_A, и докажите, что четырёхугольник $ABMC$ вписаннный.*

11.7. Пусть C_2 — точка касания вневписанной окружности к стороне AB треугольника ABC, M — середина отрезка AI_A. Докажите, что $MC = MC_2$

11.8. Докажите следущие соотношения для радиусов вписанной (r), описанной (R) и вневписанных (r_A, r_B, r_C) окружностей:

а) $\dfrac{1}{r} = \dfrac{1}{r_A} + \dfrac{1}{r_B} + \dfrac{1}{r_C}$

б) $4R = r_A + r_B + r_C - r$

11.9*. Докажите, что

а) $OI^2 = R^2 - 2Rr$,

б) $OI_A^2 = R^2 + 2Rr_A$

11.10*. Циркулем и линейкой восстановите треугольник по трём точкам — центрам описанной (O), вписанной (I) и вневписанной (I_A) окружностей.