8.1. Докажите, что множества A и B равномощны:

а) $A = \mathbb{Q}, B = \mathbb{Q} \setminus \{0\}$; **б)** $A = \mathbb{R}, B = \mathbb{R} \setminus \{0\}$;

в) $A = \mathbb{R}$, $B = (0, 1)$; **г)** $A = \mathbb{R}$, $B = [0, 1]$;

д) A — квадрат, B — круг; **е*)** A — квадрат, B — отрезок.

8.2. Является ли счётным множество конечных последовательностей букв латинского алфавита?

8.3. Докажите, что счётны

а) конечное объединение счётных множеств;

б) счётное объединение счётных множеств;

в) произвольное пересечение счётных множеств, не являющееся конечным множеством.

8.4. Докажите, что следующие множества имеют мощность континуум:

а) $2^{\mathbb{N}}$ (множество всех подмножеств множества натуральных чисел);

б*) $\mathbb{N}^{\mathbb{N}}$ (множество всех биекций из множества натуральных чисел в себя).

8.5. Докажите, что множество непересекающихся отрезков на прямой не более, чем счётно.

8.6. На координатной плоскости отмечены точки, у которых обе координаты целочисленные. Докажите, что существует прямая, проходящая через начало координат, не проходящая ни через одну из отмеченных точек кроме $(0, 0)$.

8.7. Движением плоскости называется преобразование, сохраняющее расстояние, то есть такое биективное отображение $\varphi\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, что для любых двух точек $A, B \in \mathbb{R}^2$ расстояние между $\varphi(A)$ и $\varphi(B)$ такое же, как между A и B.

а) Приведите пример какого-нибудь множества точек $A \subset \mathbb{R}^2$, которое переводится некоторым движением в своё подмножество $B \subsetneq A$, не совпадающее с A.

б*) Приведите пример ограниченного[1] множества точек $A \subset \mathbb{R}^2$, которое переводится некоторым движением в своё подмножество $B \subsetneq A$, не совпадающее с A.

[1]Множество точек на плоскости называется ограниченным, если оно содержится в некотором круге.