6.1. Даны множества $A = \{1, 3, 7, 137\}$, $B = \{3, 7, 23\}$, $C = \{0, 1, 3, 23\}$, $D = \{0, 7, 23, 2024\}$. Найдите множества: **а)** $A \cup B$ **б)** $A \cap B$ **в)** $(A \cap B) \cup D$ **г)** $C \cap (D \cup B)$ **д)** $A \setminus (B \setminus (C \setminus D))$

6.2. Докажите следующие свойства теоретико-множественных операций:

а) $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно объединения)

б) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$ (дистрибутивность объединения относительно пересечения)

в) $A \cap (B \triangle C) = (A \cap B) \triangle (A \cap C)$ (дистрибутивность пересечения относительно симметрической разности)

6.3. Пусть A, B, C — подмножества в некотором объемлющем множестве. Докажите, что $A \cap B \subset C$ тогда и только тогда, когда $A \subset \overline{B} \cup C$.

6.4. Пусть A, B — подмножества в некотором объемлющем множестве. Докажите следующие *законы двойственности де Моргана*:

- $\overline{A \cap B} = \overline{A} \cup \overline{B}$
- $\overline{A \cup B} = \overline{A} \cap \overline{B}$

6.5. Сколько существует целых чисел от **1** до **16500**, которые

а) не делятся на **5**

б) не делятся ни на **5**, ни на **3**

в) не делятся ни на **5**, ни на **3**, ни на **11**.

6.6. Пусть X — конечное множество. Докажите, что количество его подмножеств с чётным числом элементов равно количеству его подмножеств нечётным. Постройте в явном виде биекцию между множествами $E = \{Y \subset X : |Y| \,\vdots\, 2\}$ и $O = \{Y \subset X : |Y| \not\vdots\, 2\}$.

6.7. Пусть X, Y — конечные множества, $|X| = m$, $|Y| = n$. Найдите количество
а) отображений **б)** инъективных отображений
в) биективных отображений **г)** сюръективных отображений
множества X во множество Y.

6.8. Какие из указанных отображений $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ являются инъективными, сюръективными или биективными? **а)** $f(x) = 0$, **б)** $f(x) = x^2$ **в)** $f(x) = x^3$ **г)** $f(x) = x^3 - x$ **д)** $f(x) = \operatorname{arctg} x$, **е)** $f(x) = \begin{cases} \dfrac{2x+1}{x+2} \text{ при } x \neq -2 \\ 2 \text{ при } x = -2 \end{cases}$

6.9. **а)** Приведите пример двух отображений $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $f \circ g \neq g \circ f$.
б) Приведите пример двух различных нетождественных отображений $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ таких, что $f \circ g = g \circ f$.

6.10. В классе n учеников и столько же мест. Обозначим через A_k множество таких способов пересадки учеников на другие места, при котором k-й ученик останется на своём месте.

а) Вычислите мощности множеств $|A_k|$, $|A_k \cap A_l|$, $|A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \ldots \cap A_{k_s}|$.

б) Сколькими способами ученики могут пересесть так, чтобы ни один не сел на своё место? (*Указание: воспользуйтесь предыдущим пунктом и формулой включений-исключений.*)