

Число сочетаний из n по k (обозначается C_n^k) — это количество способов выбрать из n элементов k штук при условии, что варианты, отличающиеся лишь порядком выбранных элементов считаются одинаковыми. Основные свойства:

$$C_n^0 = C_n^n = 1, \quad C_n^k = C_n^{n-k}, \quad C_{n+1}^k = C_n^k + C_n^{k-1} \quad C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}.$$

Бином Ньютона: $(a+b)^n = \sum_{k=0}^n C_n^k a^k b^{n-k}.$

5.1. Из двух математиков и десяти экономистов надо составить комиссию из восьми человек. Сколькими способами можно составить комиссию, если в нее должен входить хотя бы один математик?

5.2. Найдите сумму всех 7-значных чисел, которые можно получить всевозможными перестановками цифр $1, \dots, 7$.

5.3. а) Имеется стержень и 4 диска различного диаметра. Сколько различных башен высоты от 1 до 4 можно построить, если диски можно класть друг на друга в любом порядке (в том числе больший поверх меньшего)? б) А если дисков 5?

5.4. Докажите тождества:

а) $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 + C_n^3 + \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n,$

б) $C_n^0 - C_n^1 + C_n^2 - C_n^3 + \dots + (-1)^{n-1} C_n^{n-1} + (-1)^n C_n^n = 0.$

5.5. Докажите тождество: $\sum_{0 \leq k < \frac{n}{2}} C_{n-k}^0 = C_n^0 + C_{n-1}^1 + C_{n-2}^2 + \dots + C_{\lceil n/2 \rceil}^{\lceil n/2 \rceil} = \varphi_{n+1},$

где φ_{n+1} — $n+1$ -е число Фибоначчи.

Указание: воспользуйтесь задачей 4.8 из предыдущего листка (про ступеньки на лестнице).

5.6. Докажите тождество: $0 \cdot C_n^0 + 1 \cdot C_n^1 + 2 \cdot C_n^2 + \dots + n \cdot C_n^n = n \cdot 2^{n-1}.$

5.7. Докажите тождества:

а) $(C_n^0)^2 + (C_n^1)^2 + (C_n^2)^2 + \dots + (C_n^n)^2 = C_{2n}^n,$

б) $C_{n+m}^m = C_{n+m-1}^{m-1} + C_{n+m-2}^{m-1} + \dots + C_{m-1}^{m-1} + C_{m-1}^m.$

В чём комбинаторный смысл этих тождеств?

5.8. В произведении $(1+x)(1+x^2)(1+x^3)\dots(1+x^{1000})$ раскрыли все скобки и привели подобные слагаемые. Сколько слагаемых получилось?

5.9. Докажите обобщение бинома Ньютона на случай произвольного количества слагаемых:

$$(a_1 + a_2 + \dots + a_m)^n = \sum_{\substack{k_1 + k_2 + \dots + k_m = n, \\ k_1 \geq 0, k_2 \geq 0, \dots, k_m \geq 0}} \frac{n!}{k_1! k_2! \dots k_m!} a_1^{k_1} a_2^{k_2} \dots a_m^{k_m}$$

5.10*. Докажите тождество:

$$1^2 + 2^2 + \dots + k^2 = C_{k+1}^2 + 2(C_k^2 + C_{k-1}^2 + \dots + C_2^2).$$