*Пусть требуется доказать утверждение вида: «Для каждого натурального* $n$ *верно, что...». Это всё равно, что доказать бесконечную цепочку утверждений «Для* $n = 1$ *верно, что...», «Для* $n = 2$ *верно, что...», ..., «Для* $n = 3799$ *верно, что...» и так далее.*

***Метод математической индукции*** *состоит в том, чтобы доказать первое из этих утверждений (называемое* ***базой индукции****), а затем доказать* ***шаг*** *(или* ***переход****): «Если верно утверждение №*$n$*, то верно утверждение №*$(n+1)$*». Если верны база индукции и шаг индукции, то все утверждения верны.*

**3.1.** Докажите, что при всех $x > -1$ и для любого натурального числа $n$ выполняется *неравенство Бернулли*: $(1 + x)^n \geqslant 1 + nx$.

**3.2.** В одной небольшой стране каждый город соединён с каждым дорогой с односторонним движением. Докажите, что найдётся город, из которого можно добраться в любой другой.

**3.3.** Последовательность $(a_n)$ такова, что $a_1 = 0$, $a_2 = 1$, а каждый следующий элемент равен среднему арифметическому всех предыдущих: $a_{n+1} = \frac{1}{n}\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$. Найдите значение элемента $a_{2025}$.

**3.4.** Докажите, что для любого натурального числа $n$

а) $10^n + 18n - 1 \,\vdots\, 27$ б) $2^{5n+3} + 5^n \cdot 3^{n+2} \,\vdots\, 17$

**3.5.** Значение числа $x$ выбрано таким образом, что $x + \frac{1}{x}$ — целое число. Докажите, что число $x^n + \frac{1}{x^n}$ при любом целом $n$ тоже является целым.

**3.6.** Захватив добычу, $n$ разбойников пытаются её поделить. У каждого из них своё мнение о ценности той или иной доли добычи, и каждый из них хочет получить не меньше, чем $\frac{1}{n}$ долю добычи (со своей точки зрения). Придумайте, как разделить добычу между разбойниками для случая:

а) $n = 2$;
б) $n = 3$;
в) произвольного $n > 2$.

**3.7.** Докажите, что для любых натуральных $n$

а) $\frac{1}{\sqrt{1}} + \frac{1}{\sqrt{2}} + \ldots + \frac{1}{\sqrt{n}} \geqslant \sqrt{n}$; б*) $(2!) \cdot (4!) \cdot \ldots \cdot (2n)! \geqslant \big((n+1)!\big)^n$

**3.8.** а) На сколько частей делят плоскость $n$ прямых «общего положения», то есть таких, что никакие две не параллельны и никакие три не проходят через одну точку?

б*) На сколько частей делят пространство $n$ плоскостей «общего положения»? И что это за «общее положение»?