Математическая индукция

1. Введение

Задача 1. *На клетчатой бумаге нарисован квадрат со стороной* $\boldsymbol{2^n}$ *без одной угловой клетки (рис. 1). Докажите, что его можно разрезать на уголки из трёх клеток.*

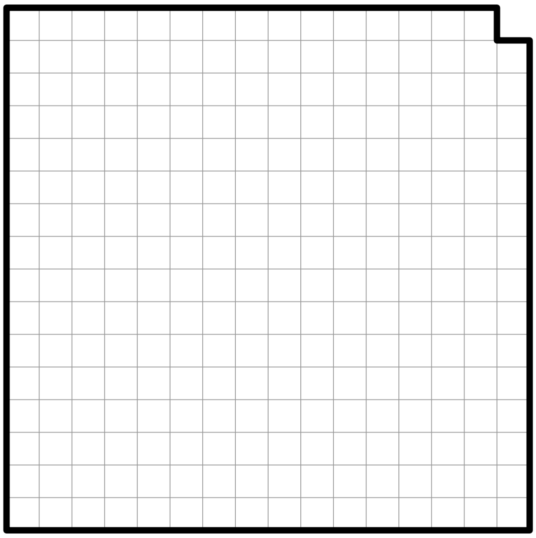

Рис. 1. Можно ли разрезать этот квадрат на уголки?

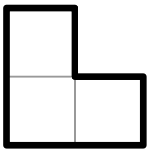

Рис. 2. $\boldsymbol{n = 1}$.

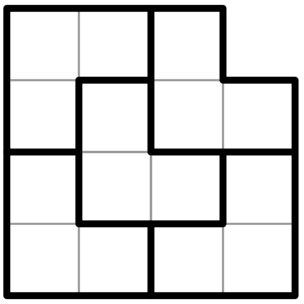

Рис. 3. $\boldsymbol{n = 2}$

Решение. Прежде, чем решать задачу в общем виде, попробуем посмотреть, что происходит при малых значениях $\boldsymbol{n}$. При $\boldsymbol{n = 1}$ разрезать нечего: доска и так представляет собой единственный трёхклеточный уголок (рис. 2). При $\boldsymbol{n = 2}$ ситуация становится чуть интереснее (рис. 3): разрезать по-прежнему нетрудно, но совсем уж вырожденным этот случай уже не является, и эта картинка может навести на мысль о том, что делать в общем случае.

Вырежем трёхклеточный уголок из середины доски (рис. 4, слева). Тогда оставшуюся часть доски легко разрезать на четыре квадрата (с вырезанной угловой клеткой) в два раза меньшего размера ($\boldsymbol{2^{n-1}}$). Если его мы уже умеем разрезать на уголки, то это даст нам искомое разрезание для случая $\boldsymbol{2^n}$. На рисунке **4** показан переход от $\boldsymbol{n = 2}$ к $\boldsymbol{n = 3}$, но нетрудно понять, что этот переход сработает и в общем случае, при переходе от $\boldsymbol{2^{n-1}}$ к $\boldsymbol{2^n}$. Таким образом, если можно разрезать квадрат со стороной $\boldsymbol{2^3}$, то можно и $\boldsymbol{2^4}$, а значит и $\boldsymbol{2^5}$, и так далее. ☐

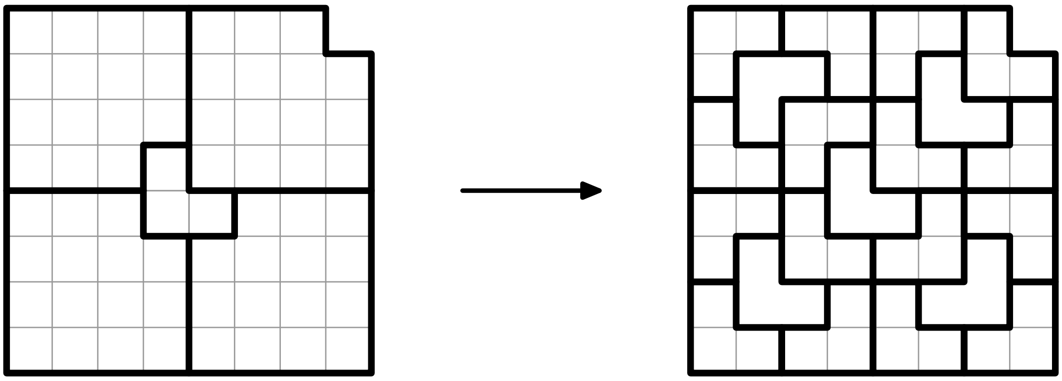

Рис. 4. Переход от $n = 2$ к $n = 3$. Уголок в центре квадрата разбивает его на четыре квадрата в два раза меньшего размера, у каждого из которых вырезана угловая клетка.

2. Метод математической индукции

Способ доказательства, который мы использовали при решении задачи 1, называется методом *математической индукции*. Мы уже встречались с ним на первом занятии этого семестра, когда доказывали формулу $\sum\limits_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. На самом деле индукция присутствует в доказательстве практически любого утверждения вида «для любого натурального числа n верно, что…», просто зачастую она не формулируется в явном виде, а скрывается за словами «и так далее». Но иногда удобнее сформулировать индукцию явно. При таком подходе сперва проверяют *базу индукции* (как правило, $n = 1$ или $n = 0$, но бывают и более сложные случаи), а потом доказывают, что если утверждение верно для n, то оно окажется верным и для $n + 1$ (это называется *индукционным переходом* или *шагом индукции*). Иногда база может состоять из нескольких утверждений, а переход может делаться от n к $n + a$ (в этом случае база должна содержать a утверждений). Также иногда при доказательстве перехода может потребоваться воспользоваться предположением индукции для *всех* предыдущих значений n, а не только одного. Есть и другие варианты индукции.

При доказательстве перехода важно не допускать «порочного круга», случайно воспользовавшись тем, что требуется доказать, вместо того, что предполагается уже известным. Кроме того, важно следить, чтобы используемые рассуждения срабатывали на всех итерациях перехода, а также правильно выбирать базу индукции. Чтобы пояснить, о чём идёт речь, приведём классический пример неверного рассуждения с использованием индукции.

3. Пример ошибочного рассуждения

Задача 2. *«Докажем» по индукции, что в любом табуне все лошади одной масти. Если в табуне всего одна лошадь, то она своей масти, так что база индукции верна. Теперь предположим, что про натуральное число n известно, что любые n лошадей обязательно одной масти. Покажем, что в таком случае и для $n + 1$ лошадей это будет верно. В самом деле, рассмотрим для начала лошадей с номерами от 1 до n. Их n штук, а значит, по предположению индукции, они все какой-то одной масти, обозначим её буквой a. С другой стороны, лошадей с номерами от 2 до $n+1$ тоже n штук, а значит, они тоже какой-то одной масти, хоть и не обязательно той же самой. Обозначим эту масть буквой b. Но лошади с номерами от 2 до n не могут менять свою масть в зависимости от того, как они сгруппированы — это лошади, а не хамелеоны. Поэтому $a = b$, и все $n + 1$ лошадей одной масти.*

$$\underbrace{\boxed{1}\ \rlap{$\overbrace{\phantom{\boxed{2}\ \ldots\boxed{n}\ \boxed{n+1}}}^{\text{масть } b}$}\boxed{2}\ \ldots\boxed{n}}_{\text{масть } a}\ \boxed{n+1} \quad\Rightarrow\quad a=b$$

Есть ли ошибка в этом рассуждении, и если есть, то какая?

Несмотря на то, что ошибка в рассуждении, несомненно, есть, выглядит оно довольно правдоподобно. Если бы не заведомо абсурдный результат, мы бы ничего и не заподозрили!

Разгадка. Для того, чтобы понять, в какой момент что-то пошло не так, попробуем «прокрутить» переходы индукции, начиная с самого первого ($n = 1 \to n + 1 = 2$). Итак, масть a у нас имеют лошади с 1 по n, то есть с 1 по 1, то есть одна лошадь с номером 1. А масть b имеют лошади с номерами от 2 до $n + 1$, то есть от 2 до 2, то есть одна лошадь с номером 2. А вот загадочный набор лошадей с номерами от 2 до n, который мы использовали для доказательства того, что $a = b$, в данном случае *не содержит ни одной лошади!* В самом деле, ведь это набор лошадей с номерами от 2 до 1! Таким образом, указанный переход не работает при $n = 1$. Так как базой индукции было именно $n = 1$, это разрушает всё доказательство. $\square$

Замечание. Если в каком-то табуне выполнено условие, что любые две взятые в нем лошади действительно одной масти, то дальше переход сработает, и наше рассуждение докажет, что в таком табуне у всех лошадей эта масть одна и та же (что, в принципе, почти тавтология, но тем не менее). Базой индукции в этом случае будет $n = 2$.

4. Число, составленное из единиц

Легко видеть, что число 111 делится на 3. В самом деле, ведь его сумма цифр делится на 3. А тот, кто не знает или не помнит признак делимости на 3, может рассуждать так: $111 = 100 + 10 + 1 = (99 + 1) + (9 + 1) + 1 = \underbrace{99}_{\vdots 3} + \underbrace{9}_{\vdots 3} + \underbrace{1 + 1 + 1}_{\vdots 3} \vdots 3$.

Рассмотрим теперь число $111\ 111\ 111$. Оно делится на 9 по тому же признаку делимости. И доказательство такое же, как и для числа 111: расписываем в виде суммы разрядных слагаемых, представляем $100\dots0$ в виде $99\dots9 + 1$ — и число представлено в виде суммы нескольких чисел из одних девяток и суммы из девяти единиц. Кстати, доказательство для общего случая точно такое же, если вы ещё не видели его — обязательно проделайте в качестве упражнения!

Что ж, идём дальше. Рассмотрим число, составленное из 27 единиц. Делится ли оно на 27? Здесь вышеприведённый трюк уже не работает: хоть сумма из 27 единиц и делится на 27, но вот делимость числа $\sum\limits_{k=1}^{26} \underbrace{99\dots9}_{k}$ уже не так очевидна. Попробуем немного изменить рассуждение:

$$\underbrace{11\dots1}_{27} = \underbrace{11\dots1}_{9}\underbrace{11\dots1}_{9}\underbrace{11\dots1}_{9} = 1\underbrace{00\dots0}_{8}1\underbrace{00\dots0}_{8}1 \cdot \underbrace{11\dots1}_{9}.$$

Легко видеть, что $1\underbrace{00\dots0}_{8}1\underbrace{00\dots0}_{8}1 \vdots 3$, так как его сумма цифр равна трём. Ну, а делимость числа $\underbrace{111\dots1}_{9}$ на 9 мы уже проверяли. Следовательно, их произведение делится на 27.

В общем случае получается то же самое — докажем по индукции, что число $\underbrace{11\dots1}_{3^n}$ делится на 3^n. Базу мы уже проверили. Предположим, что для некоторого n верно, что $\underbrace{11\dots1}_{3^n} \vdots 3^n$. Покажем, что в таком случае $\underbrace{11\dots1}_{3^{n+1}} \vdots 3^{n+1}$. В самом деле,

$$\underbrace{11\dots1}_{3^{n+1}} = \underbrace{11\dots1}_{3^n}\underbrace{11\dots1}_{3^n}\underbrace{11\dots1}_{3^n} = 1\underbrace{00\dots0}_{3^n-1}1\underbrace{00\dots0}_{3^n-1}1 \cdot \underbrace{11\dots1}_{3^n}$$

Первый множитель делится на 3 по признаку делимости, а второй — на 3^n по предположению индукции. Значит, произведение делится на 3^{n+1}. □

5. Придумываем конструкцию, затем доказываем

Задача 3. *Существуют ли* 2025 *различных натуральных числа такие, что сумма любых* 2024 *из них делится на оставшееся число?*

Замечание. Эта задача была на московской математической олимпиаде для 9 класса в 2005-м году[1].

Решение. Построим такую последовательность. Для начала заметим очевидное: условие «сумма любых $n - 1$ из них делится на оставшееся число» эквивалентно тому, что

[1]Но вместо числа 2025, естественно, было 2005. Число, совпадающее с номером года, в большинстве случаев указывает на то, что задача верна если не для любого n, то для многих уж точно.

сумма всех n чисел делится на каждое из них. В самом деле, сумма всех — это сумма оставшихся плюс само это число, а оно уж само на себя как-нибудь разделится. Что нам даст такая переформулировка? Пока неясно, но сумма всех n чисел одинаковая, она не зависит от конкретного числа, в отличие от суммы оставшихся, поэтому есть надежда, что в таком виде задача будет проще.

Попробуем посмотреть, что будет при малых n. При $n = 3$ такие числа, очевидно, существуют — это, как минимум, числа $1, 2, 3$, известные тем, что сумма этих чисел равна их произведению, а стало быть, и делится на каждое из них. Как подобрать четвёртое число таким образом, чтобы условие делимости не нарушалось? Первые 3 числа уже являются делителями суммы. Было бы неплохо выбрать четвёртое число таким образом, чтобы новая сумма была кратна старой. Это несложно сделать: достаточно выбрать новое число равным сумме всех предыдущих. Этот процесс можно продолжать и дальше, таким образом, имеет место следующее

Утверждение 1. *Пусть последовательность (a_n) определена следующим образом: $a_1 = 1, a_2 = 2, a_{n+1} = \sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ при $n \geqslant 2$. Тогда сумма любых первых n элементов последовательности a_n делится на все a_k для $k = 1, \ldots, n$.*

Доказательство. База индукции: при $n = 2$ утверждение верно (при $n = 1$ утверждение тоже верно, но в качестве базы индукции оно нам не подходит, так как рекуррентное определение последовательности (a_n) работает только при $n \geqslant 2$). Переход: пусть для n верно, что $\sum\limits_{k=1}^{n} a_k$ кратно всем a_k при $k = 1, \ldots, n$. Тогда $\sum\limits_{k=1}^{n+1} a_k = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) + a_{k+1} = \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) + \left(\sum\limits_{k=1}^{n} a_k\right) = 2\sum\limits_{k=1}^{n} a_k = 2a_{n+1}$. По предположению индукции эта сумма делится на все a_k при $k = 1, \ldots, n$, кроме того, она делится на a_{n+1}, так как равна удвоенному значению последнего. $\square$

6. Усиление утверждения

Задача 4. *Доказать, что при любом натуральном n выполнено неравенство:*

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} < 2.$$

6.1. Отступление о гармоническом ряде

На первый взгляд может показаться, что утверждение задачи 4 «очевидно», ведь каждое следующее слагаемое меньше предыдущего. Что тут доказывать, казалось бы? Оказывается, интуиция может нас обманывать. Чтобы убедиться в этом, уберём возведение в квадрат в знаменателе и рассмотрим сумму

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}.$$

Оказывается, выбором n эту сумму можно сделать сколь угодно большой. Чтобы убедиться в этом, сгруппируем слагаемые следующим образом:

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{n} = 1+\frac{1}{2}+\left(\frac{1}{3}+\frac{1}{4}\right)+\left(\frac{1}{5}+\frac{1}{6}+\frac{1}{7}+\frac{1}{8}\right)+$$
$$+\left(\frac{1}{9}+\frac{1}{10}+\frac{1}{11}+\frac{1}{12}+\frac{1}{13}+\frac{1}{14}+\frac{1}{15}+\frac{1}{16}\right)+\ldots+\frac{1}{n} >$$
$$> 1+\frac{1}{2}+\left(\underbrace{\frac{1}{4}+\frac{1}{4}}_{=\frac{1}{2}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}+\frac{1}{8}}_{=\frac{1}{2}}\right)+\left(\underbrace{\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}+\frac{1}{16}}_{=\frac{1}{2}}\right)+$$
$$+\ldots+\frac{1}{n}.$$

Выбирая n достаточно большим[2], можно добиться, чтобы таких сумм, превосходящих $\frac{1}{2}$ было сколько угодно. Таким образом, сумма $\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$, вопреки нашей интуиции, может быть сколь угодно большой.

Бесконечная сумма $\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{k} = 1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\frac{1}{4}+\frac{1}{5}+\ldots$ называется гармоническим рядом (а рассмотренная нами конечная сумма называется частичной суммой гармонического ряда). Проведённое нами выше рассуждение показывает, что последовательность частичных сумм гармонического ряда стремится к бесконечности при $n\to\infty$. Обычно это утверждение формулируют в виде фразы «гармонический ряд расходится».

6.2. Попытка доказать по индукции

Вернёмся к задаче 4. Если попробовать доказать её «в лоб», оказывается, что индукция нам не особо помогает. В самом деле, даже если при конкретном значении n мы знаем, что $1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\ldots+\frac{1}{n^2} < 2$, совершенно непонятно, что произойдёт с левой частью, если к ней прибавить $\frac{1}{(n+1)^2}$. Может быть, она по-прежнему будет меньше двух, а может станет больше. Подчеркнём, что из этого ни в коем случае не следует, что утверждение, которое мы хотим доказать, неверно. Просто наш метод доказательства не подошёл.

[2]Для того, чтобы убедиться в этом на практике, n очень быстро придётся брать несуразно большим, так как для получения каждой следующей суммы, превосходящей $\frac{1}{2}$, придётся брать в два раза больше слагаемых, чем для предыдущей, а это количество растёт довольно быстро. Однако несмотря на свои внушительные размеры, это количество будет, всё же, конечным.

6.3. Усиливаем утверждение

Итак, наивное доказательство не сработало. Проблема в том, что в нашем предположении индукции нет никакой информации, о том, *насколько* левая часть меньше двух. Подставив малые значения n, можно убедиться, что это неравенство довольно грубое (при $n = 1$ имеем $1 < 2$). Вот бы подобрать такую функцию $g(n)$, чтобы при всех n было верно утверждение $1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - g(n)$, причём таким образом, чтобы мы могли выполнить переход индукции. Что нужно для того, чтобы выполнялся переход? При переходе от n к $n+1$ левая часть увеличивается на $\frac{1}{(n+1)^2}$, а к правой прибавляется $g(n) - g(n+1)$. Чтобы мы могли сделать вывод о том, что неравенство остаётся верным, нам нужно, чтобы правая часть выросла сильнее, чем левая, то есть $g(n) - g(n+1) > \frac{1}{(n+1)^2}$. Это верно, например, если положить $g(n) = \frac{1}{n}$, так как тогда $g(n) - g(n+1) = \frac{1}{n} - \frac{1}{n+1} = \frac{1}{n(n+1)} > \frac{1}{(n+1)^2}$.

Остаётся проверить выполняется ли с такой функцией $g(n)$ база индукции. Выполняется: при $n = 1$ имеем $1 \leqslant 2 - \frac{1}{1}$. Как видим, здесь даже достигается равенство, то есть неравенство стало сильно точнее. Ну а раз выполнена база, а переход работает из-за того, что функцию $g(n)$ мы специально так подобрали, то по индукции мы доказали

Утверждение 2. *Для любого натурального числа n выполнено неравенство*

$$1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \ldots + \frac{1}{n^2} \leqslant 2 - \frac{1}{n}.$$

Доказать более сильное утверждение оказалось проще, так как при его доказательстве мы смогли опираться на более сильное предположение!

Дополнительная литература

- Шень А. Математическая индукция. М.:МЦНМО, 2006
- Спивак А.В. Энциклопедия «Числа и фигуры»: `http://www.kvant.info/panov/enciklop.pdf`
- Алфутова Н.Б. Устинов А.В. Алгебра и теория чисел. М.:МЦНМО, 2005