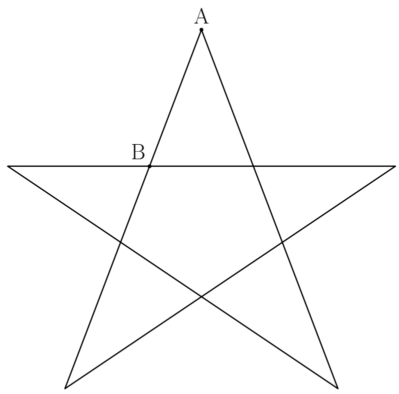
Вступительная олимпиада 2024/2025 учебного года

8 класс, устный тур 28.09.2024. Все задачи и решения

1. **Условие.** Из доски 8×8 вырезали одну клетку. Какое минимальное количество ладей нужно расставить в клетках доски, чтобы побить все её клетки? Клетка, на которой стоит ладья, всегда считается битой. Ладья не бьёт сквозь вырезанную клетку.
Ответ. 7
Решение. Факт: если поставить ладью на любую клетку обычной шахматной доски, то можно расставить ещё 7 ладей так, чтобы на каждой горизонтали и каждой вертикали стояла ладья. Доказать это можно так. Пусть ладья стоит на клетке (a, b) (здесь a, b — числа от 1 до 8), тогда рассмотрим перестановку чисел от 1 до 8, кроме a, обозначим эти числа как $t_1, .., t_7$. Также рассмотрим перестановку чисел от 1 до 8, кроме b, обозначим эти числа как $s_1, .., s_7$. Поставим остальных ладей на клетки (t_i, s_i).
В такой расстановке любая свободная клетка будет побита ровно 2 ладьями (с той же вертикали и той же горизонтали). Теперь мысленно поставим ладью на вырезанную клетку, после чего поставим остальные 7 ладей в соответствии с фактом. Теперь каждая клетка бита одной или двумя из этих 7 ладей.
Комментарии. Несложная задача «на разогрев».

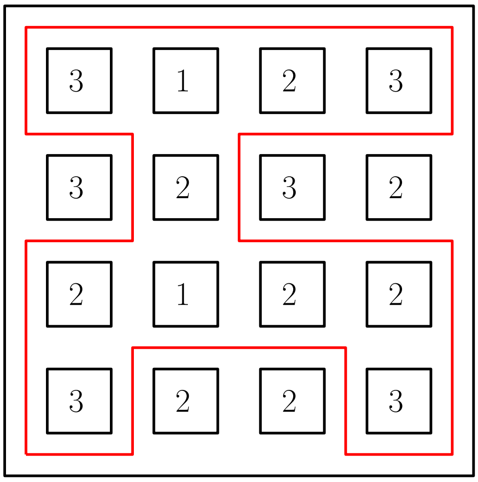


2. **Условие.** Сколькими способами можно нарисовать звезду (см. рисунок), не отрывая карандаша от бумаги и не проводя дважды одну линию, если
а) начинать нужно с точки A?
б) начинать нужно с точки B?
Ответ. 192, 384
Решение. Первое решение. Определим, как проводить линию в узлах. Для каждого узла есть 3 опции: «крест-накрест», «верх и низ», «лево и право». При этом последнюю опцию можно использовать не более одного раза, иначе звезда распадётся. Если её не использовать, то способов 2^4, так как опции для четырёх узлов однозначно определяют опцию для пятого. Если использовать, то их $5 \cdot 2^4$. Всего 96. Осталось выбрать изначальное направление: в пункте а) 2 варианта, а в пункте б) — 4.
Второе решение. Будем начинать с точки B. Нам нужно пройти внутренний пятиугольник (5 отрезков) и 5 «рожек» звезды. Звезда всегда рисуется так: пройдёмся из точки B до какого-то узла, потом разворачиваем обратно, рисуем то, что не нарисовали (таким образом нарисуем n отрезков и n рожек, $n = 0, ...5,$), потом аналогично идём в обратном направлении. Узел, помимо B, можно выбрать 4 способами; что рисуем первым (отрезок или «рожек») — тоже 2 способами для каждого из 5 концов звезды, направление обхода для рисунка первого куска — ещё 2 способа. Всего $4 \cdot 2^6 = 256$ способов. Наконец, можно пройтись сначала целиком до B (по или против часовой стрелки), а потом остальное дорисовать (тоже по или против): это $2 \cdot 2^5 \cdot 2 = 128$ способов. Всего $256 + 128 = 384$ способа.
Если начинаем с точки A, то ответ будет в 2 раза меньше: $384 : 2 = 192$ способа. Действительно, любой путь из точки A выглядит так: $AxByBz$ (x, y, z — какие-то куски путей). Тогда этому пути с началом в A соответствуют 2 пути с началом в B: $ByBzAx$, $BzAxBy$.
Комментарии. Каждый пункт стоит по полбалла.

3. **Условие.** В пакет можно положить от 20 до 40 конфет. Каждая из конфет может быть одного из трёх цветов. Сколько всего можно собрать разных пакетов? Конфеты одного цвета неразличимы, порядок конфет значения не имеет.
Ответ. 10801
Решение. Используем метод шаров и перегородок. Нам нужно 40 шаров и 3 перегородки, по одной для каждого цвета. Все конфеты правее третьей перегородки не попадают в пакет. Получаем C_{43}^{3}. Теперь нужно вычесть варианты, когда в пакете не более 19 конфет. Берём 19 шаров и 3 перегородки, получаем C_{22}^{3}.
Комментарии. Комментарии.

4. **Условие.** Двое написали на доске число 12 и играют в следующую игру. Игроки выполняют ходы по очереди, за один ход можно заменить имеющееся число n либо числом $n-8$, либо числом $n(n+1)$. Выигрывает тот игрок, который первым получит число 0. Существует ли выигрышная стратегия для игрока, который ходит вторым?
Ответ. Нет.
Решение. Предположим, что у второго игрока существует выигрышная стратегия, тогда её нет у первого (оба одновременно выиграть не могут). Пусть первым ходом первый игрок получит число $4 = 12 - 8$. Тогда второй игрок своим первым ходом может получить либо $-4 = 4-8$, либо $20 = 4(4+1)$. В обоих случаях первый игрок может получить число $12 = (-4)\cdot(-3) = 20 - 8$. Получается, что мы оказались в ситуации начала игры, где поменялись местами первый и второй игрок. Отсюда получаем противоречие с изначальным предположением.
Комментарии. Комментарии.

5. **Условие.** Городской квартал состоит из 100 домов и сверху выглядит как клетчатый квадрат 10×10: квадратам соответствуют дома, а линиям сетки — улицы. Путешественник начинает свой путь в углу квартала. Он хочет обойти квартал и вернуться в ту же точку, до этого ни разу не пересекая свой собственный путь. Проходя по каждой улице, путешественник будет рассматривать два дома — слева и справа от себя. Какое максимальное число домов он может рассмотреть с трёх сторон?
На рисунке — пример маршрута путешественника в аналогичном квартале 4×4. На каждом доме указано количество сторон, с которых путешественник рассмотрел этот дом.



Ответ. 50
Решение. В каждом квадрате 2×2 может быть не более двух таких домов — отсюда получаем оценку. Пример строится индуктивно. Идея такая: сначала учимся строить путь из угла в противоположный угол («змейкой»), потом добавляем к нему обратный путь по границе квадрата (тоже «змейкой», но поменьше).
Комментарии.

6. **Условие.** О числах A и B известно следующее:
- $A > B$;
- число A нечётное и имеет нечётное количество делителей;
- число B имеет нечётное простое количество делителей;
- числа A и B не являются взаимно простыми.

Найдите минимально возможное количество делителей числа $A - B$.
Ответ. 12
Решение. Из условий понимаем, что число B имеет вид p_1^{2s}, а число A имеет вид $p_1^{2n_1}p_2^{2n_2}\dots p_k^{2n_k}$ (здесь p_1 для удобства перенесено на первое место), причём ни одно из простых чисел не равно двойке. Тогда $A - B = p_1^{2r}(N^2 - p_1^{2(s-r)}) = p_1^{2r}(N - p_1^{s-r})(N + p_1^{s-r})$. Здесь первый множитель содержит p_1 хотя бы во второй степени, а второй и третий множители в совокупности содержат двойку хотя бы в третьей степени. Отсюда получаем нижнюю оценку 12 на количество делителей. Эта оценка достигается, например, на числах 225 и 25
Комментарии. Комментарии.