

0. (На разбор)

а) Хромая ладья может делать ход либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку вправо. Сколькими способами она может добраться из клетки a1 в клетку d5?

б) Винни-Пух решил сесть на монодиету: три дня в неделю питаться только пирожками, а остальные четыре дня — только вареньем. Сколько у него есть возможностей составить меню на неделю?

См. картинку на обратной стороне, на которой изображена часть **треугольника Паскаля**. Строка из одной единицы считается нулевой, строка из двух единиц — первой и т.д.

1. а) Докажите, что каждое число в треугольнике Паскаля равно количеству путей от вершины до него, составленных из шагов вправо-вниз и влево-вниз.

б) Докажите, что на  $k$ -м месте в  $n$ -й строке треугольника Паскаля находится число  $C_n^k$ .

2. а) Докажите, что  $C_n^k = C_n^{n-k}$ .

б) Докажите, что  $C_n^k + C_n^{k+1} = C_{n+1}^{k+1}$ .

3. а) Сколько чисел в сотой строке треугольника Паскаля?

б) Чему равна их сумма?

в) Докажите, что  $C_n^0 + C_n^1 + C_n^2 \dots + C_n^{n-1} + C_n^n = 2^n$ .

4. Докажите, что в любой строке треугольника Паскаля (кроме нулевой строки из одной единицы) количество нечётных чисел чётно.

5. Докажите, что если  $p$  — простое число, то для любого  $k$  от 1 до  $p - 1$  число  $C_p^k$  делится на  $p$ .

6. Докажите, что все простые числа, большие 2, встречаются в треугольнике Паскаля ровно 2 раза.

## Дополнительные задачи

7. Докажите, что существует бесконечно много чисел, которые встречаются в треугольнике Паскаля

а) хотя бы 4 раза;

б) ровно 4 раза.

8. Докажите, что  $C_n^0 + C_{n+1}^1 + C_{n+2}^2 + \dots + C_{n+m-1}^{m-1} + C_{n+m}^m = C_{n+m+1}^m$ .

9. а) Докажите, что вторая диагональ треугольника Паскаля образует последовательность всех натуральных чисел.

б) Число одинаковых кругов, образующих правильный треугольник, называется треугольным числом. Докажите, что третья диагональ треугольника Паскаля образует последовательность всех треугольных чисел.

в) Число одинаковых шаров, образующих правильную пирамиду, называется пирамидальным числом. Докажите, что четвёртая диагональ треугольника Паскаля образует последовательность всех пирамидальных чисел.



