Малый мехмат **12 октября 2024 года**

8 класс *Сколько ещё?*

Напоминание: $n! = 1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \ldots \cdot n$, $0! = 1$.

В комбинаторике часто встречаются задачи типа “Сколькими способами можно выбрать k предметов из n различных предметов?”. Ясно, что задача имеет смысл, если $0 \leqslant k \leqslant n$. Слово “выбрать” следует понимать так: из кучи, в которой n предметов, мы взяли k и сложили их вперемешку в рюкзак (то есть порядок выбора никакой роли не играет). Количество способов сделать этот выбор называется *биномиальным коэффициентом (числом сочетаний)*, обозначается как C_n^k (читается “цэ из n по k”). Формула для его вычисления такая:

$$C_n^k = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1)}{k!} = \frac{n!}{k! \cdot (n-k)!}.$$

0. [На разбор] В классе 33 ученика.
а) Сколькими способами можно назначить дежурных на понедельник, вторник и среду?
б) Ученики участвовали в викторине. Сколькими способами могли распределиться первые три места?
в) Сколькими способами можно выбрать команду из трёх учеников?
г) Сколькими способами можно выбрать две команды из двух учеников? Порядок команд неважен.

1. а) Из 33 подряд идущих дней Джараксус должен работать 30 дней, зато он сам может выбрать, какие дни будут выходными. Сколькими способами он может это сделать?
б) Каждый день Рагнарос убивает либо одно насекомое, либо 5 насекомых. За 33 дня он хочет убить 153 насекомых. Сколькими способами он может это сделать?
в) У Нефариана есть 33 драгоценных камня — все разные. Он хочет распределить эти камни по двум одинаковым сундукам так, чтобы в одном сундуке было в 10 раз больше камней, чем в другом. Сколькими способами он может это сделать?

2. Сколько разных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове
а) ЗМЕЕЕД? б) АНАНАС? в) ВОДООТВОД?
Исходное слово тоже считается.

3. В шкафу лежат 10 носков — все разных цветов.
а) Сколькими способами можно разбить их на 5 пар? Порядок пар и порядок носков в паре неважен.
б) Как изменится ответ, если из 10 носков 5 красных и 5 синих? Носки одного цвета неразличимы.

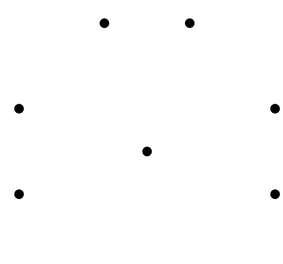
4. Семи разным людям нужно раздать 24 одинаковые конфеты. Сколькими способами можно это сделать, если
а) все, кто получает конфеты, должны получить одинаковое число конфет?
б) все должны получить разное число конфет?
в) каждый должен получить хотя бы три конфеты?

5. В центре доски 5×5 стоит шахматный король. Сколькими способами он может вернуться в центр доски, сделав 4 хода?

6. Сколькими способами из квадрата 6×6 можно вырезать по линиям сетки
а) прямоугольник с целыми сторонами? (Исходный квадрат тоже считается.)
б) прямоугольник с целыми сторонами, который не является квадратом?

Дополнительные задачи

7. На плоскости отмечено 9 точек (см. рисунок). Сколько существует разных
а) треугольников
б) четырёхугольников
с вершинами в отмеченных точках?



8. а) Сколькими способами из квадрата $n \times n$ можно вырезать прямоугольник с целыми сторонами по линиям сетки, который не является квадратом?
б) Сколькими способами из куба $n \times n \times n$ можно вырезать параллелепипед с целыми сторонами по линиям сетки, который не является кубом?

9. Имеется 8 пронумерованых коробочек, 4 синих и 4 красных шарика. Сколькими способами можно разложить шарики в коробочки, чтобы ни в какой коробочке не лежали разноцветные шарики?