Сдавая каждую задачу из этого листочка, вам нужно прокомментировать, какие комбинаторные методы вы используете при её решении и почему. Напомним несколько основных методов.

(Разумно организованный) перебор.

Задача 1. Сколькими способами можно разложить 15 одинаковых конфет по 5 одинаковым коробкам так, чтобы в каждой коробке лежало разное количество конфет?

Порядок коробок неважен, поэтому естественно будет расставить их в порядке возрастания количества конфет. Для выполнения условия в них нужно положить хотя бы $0+1+2+3+4=10$ конфет. Будем раскладывать остальные 5 конфет, соблюдая порядок. Получим 7 способов.

$0+1+2+3+9$, $0+1+2+4+8$, $0+1+2+5+7$, $0+1+3+4+7$

$0+1+3+5+6$, $0+2+3+4+6$, $1+2+3+4+5$

Перебор не обязательно должен быть разумно организованным, главное, чтобы он был правильным, то есть все случаи были подсчитаны и никакой случай не был подсчитан дважды.

Правило умножения.

Задача 2. В первой коробке лежит 5 конфет, во второй — 7 конфет, в третьей — 10 конфет. Все конфеты разные. Сколькими способами можно выбрать по одной конфете из каждой коробки?

Выберем конфету из первой коробки — это можно сделать 5 способами. Затем выберем конфету из второй коробки — это можно сделать 7 способами. Потом выберем конфету из третьей коробки — это можно сделать 10 способами. По правилу умножения количество способов выбрать по одной конфете будет равно $5\cdot 7\cdot 10=350$.

Правило умножения применяется, когда нужно сделать несколько выборов, причём результат предыдущего выбора никак не влияет на количество способов сделать следующий выбор. Этому правилу соответствует логическая связка «И …, И …». В данном случае нам нужно выбрать И конфету из первой коробки, И конфету из второй коробки, И конфету из третьей коробки.

Правило сложения.

Задача 3. В первой коробке лежит 5 конфет, во второй — 7 конфет, в третьей — 10 конфет. Все конфеты разные. Сколькими способами можно дать двум разным людям по конфете из одной и той же коробки?

Если выбирать конфеты из первой коробки, то по правилу умножения получаем $5\cdot 4=20$ способов, так как после выбора первой конфеты в коробке всегда останется 4 конфеты. Аналогично, для второй коробки получим $7\cdot 6=42$ способа, а для третьей $10\cdot 9=90$ способов. По правилу сложения общее число способов будет равно $20+42+90=152$.

Правило сложения применяется, когда множества рассматриваемых способов не пересекаются. Этому правилу соответствует логическая связка «ЛИБО …, ЛИБО …». В данном случае нам нужно выбрать ЛИБО две конфеты из первой коробки, ЛИБО две конфеты из второй коробки, ЛИБО две конфеты из третьей коробки.

Добавление/сброс нумерации.

Задача 4. **а)** Сколькими способами можно разложить 15 одинаковых конфет по 5 разным коробкам так, чтобы в каждой коробке лежало разное количество конфет?

б) Сколькими способами можно выбрать 4 конфеты из 8 разных конфет?

в) В мешочке лежит 8 разных конфет. Сколькими способами можны выбрать 6 из них и разложить поровну по 2 одинаковым коробкам?

а) Эта задача отличается от задачи 1 только тем, что коробки разные. Значит, после выбора 5 слагаемых, определяющих количество конфет, нужно ещё выбрать их порядок. Для 5 различных слагаемых существует $5!=120$ различных порядков. Поскольку нам нужно выбрать И сами слагаемые, И их порядок, то по правилу умножения получаем $7\cdot 120=840$ способов.

б) Выберем последовательно первую, вторую, третью и четвёртую конфеты. По правилу умножения получаем $8\cdot 7\cdot 6\cdot 5=1680$ способов. Однако этот ответ не подходит, потому что, выбирая конфеты, мы также задали их нумерацию, а по условию задачи порядок конфет неважен. Так как добавлению нумерации соответствует операция умножения на количество порядков (соответствующий факториал), то сбросу нумерации соответствует обратная операция — деление на количество порядков. Значит, в данном случае получаем ответ $\frac{8\cdot 7\cdot 6\cdot 5}{4!}=70$.

в) Выберем первую тройку конфет (используем правило умножения) и сбосим нумерацию, так как порядок конфет в коробке неважен. Получаем $\frac{8\cdot7\cdot6}{3!} = 56$ способов. После этого в мешочке останется 5 конфет. Из них аналогично выберем вторую тройку конфет. Получаем $\frac{5\cdot4\cdot3}{3!} = 10$ способов. Нам нужно выбрать И первую, И вторую тройки конфет, поэтому перемножаем эти числа. Также не забываем, что порядок самих троек неважен, так как коробки одинаковые. Значит, нужно сбросить нумерацию троек (нумерацию коробок). Окончательно получаем $\frac{56\cdot10}{2!} = 280$ способов.

Биномиальный коэффициент.

Задача 5. Сколькими способами можно выбрать k конфет из n разных конфет? $(0 \le k \le n)$
Это обобщение задачи 4б.
Сначала выберем k конфет по порядку — получаем $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot (n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$. Затем сбросим их нумерацию, поделив на $k!$. Получаем $\frac{n!}{k!(n-k)!}$. Это биномиальный коэффициент C_n^k, и он позволяет получить ответ на общий вопрос «Сколькими способами можно выбрать k элементов из n разных элементов?».

1. Сколькими способами можно разложить 16 одинаковых конфет по 5
а) одинаковым
б) разным
коробкам так, чтобы в каждой коробке лежало разное количество конфет?

2. В пяти расположенных в ряд коробках лежат конфеты: 5, 6, 7, 8 и 9 конфет соответственно. Все конфеты разные. Сколькими способами можно выбрать по одной конфете из
а) двух соседних коробок?
б) двух не соседних коробок?

3. В 11 классе 6 мальчиков и 5 девочек.
а) Сколькими способами можно расставить в ряд 5 человек из класса так, чтобы мальчики и девочки чередовались?
б) Сколькими способами можно выбрать из класса 3 мальчиков и 2 девочек?

4. В мешочке лежит 12 разных конфет. Сколькими способами можно разложить их поровну по трём
а) разным
б) одинаковым
коробкам?

5. Сколько разных «слов» можно получить, переставляя буквы в слове
а) ОГОРОД?
б) ОКОРОК?

6. В 11 классе 6 мальчиков и 5 девочек.
а) Сколькими способами можно выбрать из класса непустую команду, в которой мальчиков и девочек поровну?
б) Сколькими способами можно выбрать из класса команду из 6 человек, в которой количество мальчиков и девочек не совпадает?

Дополнительные задачи

7. В шести расположенных в ряд коробках лежат конфеты: 5, 6, 7, 8, 9 и 10 конфет соответственно. Все конфеты разные. Сколькими способами можно выбрать по три конфеты из
а) трёх соседних коробок?
б) трёх коробок, среди которых нет соседних?

8. В мешочке лежат 12 одинаковых конфет. Сколькими способами можно разложить их
а) по 4 одинаковым коробкам?
б) по 4 разным коробкам?

9. Имеется 8 шоколадок и 8 карамелек. Сколькими способами можно разложить эти сладости по 3 коробкам и 2 мешочкам, если в коробке количество шоколадок должно отличаться от количества карамелек ровно на 2, а в мешочке ровно на 1?
Считаем, что шоколадки, карамельки, коробки, мешочки не различимы между собой.