

1. В саду растут 23 дерева, которым в сумме 700 лет. Самое молодое из этих деревьев посадили 5 лет назад. Сколько лет было в сумме остальным деревьям в тот момент? Возраст каждого дерева считается от момента его посадки. *Ответ запишите в виде целого числа.*

Ответ: 585.

Решение. $700 - 23 \cdot 5 = 585$.

2. У восьмиклассников, пришедших на Малый мехмат, всего 540 смартфонов. В некоторых смартфонах по три камеры, в половине остальных — по две камеры, а в другой половине остальных — по четыре. Сколько всего камер в смартфонах у восьмиклассников? *Ответ запишите в виде целого числа.*

Ответ: $540 \cdot 3 = 1620$.

Решение. Если из каждого «четырёхкамерного» смартфона переставить по одной камере в «двухкамерный», то все смартфоны станут «трёхкамерными», а суммарное количество камер не изменится.

3. Незнайка задумал натуральное число, умножил это число на произведение его цифр и получил 648. Какое самое большое число мог задумать Незнайка? *Ответ запишите в виде целого числа.*

Ответ: 81.

Решение. $648 = 8 \cdot 81 = 1 \cdot 8 \cdot 81$, поэтому Незнайка мог задумать число 81. Больше число он задумать не мог: это могло быть только одно из чисел $4 \cdot 27 = 108$, $2 \cdot 81 = 162$, $8 \cdot 27 = 216$, $4 \cdot 81 = 324$ или $8 \cdot 81 = 648$ (делители числа 648, большие 81), но ни одно из этих чисел при умножении на произведение своих цифр не даёт 648.

4. В парке есть 8 беседок, некоторые из которых соединены между собой дорожками (каждая такая дорожка соединяет какие-то две беседки). Если какие-нибудь две беседки не соединены дорожкой напрямую, то посетители парка могут протоптать между ними ровно одну тропинку. Какое наибольшее число тропинок смогут протоптать посетители парка, если дорожек между беседками всего 15? *Ответ запишите в виде целого числа.*

Ответ: 13.

Решение. Чтобы соединить 8 беседок каждую с каждой, нужно $8 \cdot 7 : 2 = 28$ дорожек/тропинок. Если 15 из них — дорожки, то ещё $28 - 15 = 13$ должны быть тропинками.

5. Треугольник ABC — прямоугольный (угол C — прямой), $\angle A = 30^\circ$. На катете AC взята точка D так, что $\angle ABD = 30^\circ$. Найдите AD , если $DC = 6$. *Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.*

Ответ: 12.

Решение. Если $\angle A = 30^\circ$, то $\angle ABC = 90^\circ - 30^\circ = 60^\circ$, $\angle CBD = \angle ABC - \angle ABD = 30^\circ$. Так как $DC = 6$, то $BD = 2CD = 12$ (из прямоугольного $\triangle BCD$ с углом 30°). Так как $\angle A = \angle ABD = 30^\circ$, то треугольник ABD — равнобедренный: $AD = BD = 12$.

6. Вдоль садовой дорожки, ведущей от дома к калитке, планируется посадить кусты роз — по 5 кустов с каждой стороны. В продаже есть розовые кусты с белыми и с красными цветами (в неограниченном количестве). Сколько есть способов посадить розы так, чтобы с каждой стороны от дорожки были розы обоих цветов? Кусты роз одного цвета неразличимы между собой. *Ответ запишите в виде целого числа.*

Ответ: 900.

Решение. Всевозможных способов высадить розы есть $2^{10} = 1024$ (на каждое из 10 мест можно посадить куст одного из двух цветов). Из этих способов нам не подходят только те, при которых с какой-то стороны дорожки растут кусты одного цвета. Таких способов будет $2 \cdot 2 \cdot 2^5 - 4 = 124$. В самом деле, есть два способа выбрать, с какой стороны дорожки будут кусты одного цвета, два способа выбрать этот один цвет, и по 2 способа выбрать цвет каждого из кустов с противоположной стороны дорожки, но при таком подсчёте мы дважды учитываем те 4 способа, при которых с каждой стороны дорожки все кусты одного цвета. Поэтому подходящих способов остаётся $1024 - 124 = 900$.

7. На сторонах AB, BC, AC треугольника ABC отметили точки D, E, F соответственно. Даны периметры треугольников (с точностью до сотых):

$$P(ABC) = 12; \quad P(ADF) = 4,61; \quad P(BDE) = 6,83; \quad P(CEF) = 7,41.$$

Найдите периметр треугольника DEF (с точностью до сотых), считая данные значения периметров точными. *Ответ запишите в виде целого числа или десятичной дроби.*

Ответ: 6,85.

Решение. Пусть $P(\triangle ABC) = a$, $P(\triangle ADF) = b$, $P(\triangle BDE) = c$, $P(\triangle CEF) = d$. По определению периметра $P_{\triangle ABC} = AB + BC + AC$, $P(\triangle ADF) = AD + DF + AF$, $P_{\triangle BDE} = BD + DE + BE$, $P(\triangle CEF) = CE + EF + CF$, $P(\triangle DEF) = DE + EF + DF$. Отсюда следует, что $P(\triangle DEF) = P(\triangle ADF) + P(\triangle BDE) + P(\triangle CEF) - P(\triangle ABC) = b + c + d - a \approx 6,85$.

8. Про два четырёхзначных числа известно, что все 8 цифр, содержащиеся в этих числах, различны, а сумма и разность этих чисел делятся на 9. Найдите наибольшее возможное значение разности этих чисел. *Ответ запишите в виде целого числа.*

Ответ: 8847.

Решение. Если сумма и разность двух чисел делятся на 9, то каждое из этих чисел тоже делится на 9 (из второго условия следует, что у них одинаковые остатки при делении на 9, а тогда из первого — что эти остатки равны нулю). Тогда и сумма цифр каждого из этих чисел делится на 9, как и сумма всех 8 цифр, составляющих эти числа. Поскольку $0 + 1 + 2 + \dots + 9 = 45$, а две из десяти цифр не входят в наши числа, то сумма всех восьми их цифр может быть равна только 36 (она должна делиться на 9 и быть меньше 45, при этом получаться из 45 вычитанием двух различных однозначных чисел).

Пример: $9873 - 1026 = 8847$. В разряде тысяч у разности не может быть больше 8, причём 8 можно получить только как $9 - 1$ (как $8 - 0$ — нельзя, потому что число не должно начинаться с нуля). Из оставшихся цифр наибольшую разность имеют 8 и 0, поэтому в разряде сотен у разности тоже не может быть больше, чем $8 - 0 = 8$. Сумма оставшихся двух цифр большего числа должна делиться на 9 с остатком 1, поэтому она должна быть равна 10 (1 не получить, поскольку цифры 0 и 1 уже заняты, а 19 — слишком много для суммы двух цифр). При этом $10 = 7 + 3 = 6 + 4 = 4 + 6 = 3 + 7$. Сумма же оставшихся двух цифр меньшего числа должна делиться на 9 с остатком 8, поэтому она должна быть равна 8 (17 не получить, поскольку цифры 8 и 9 уже заняты). При этом $8 = 2 + 6 = 3 + 5 = 5 + 3 = 6 + 2$. Для максимизации разности наших чисел последние две цифры большего числа должны образовывать как можно большее число, а последние две цифры меньшего — как можно меньшее. Тогда получаем числа 9873 и 1026; их разность $9873 - 1026 = 8847$.