Вступительная олимпиада 2024/2025 учебного года

7 класс, устный тур 28.09.2024. Все задачи и решения

1. **Условие.** Луиза выписала числа от одного до ста, а Серёжа часть из них стёр. Среди оставшихся чисел
   • у 20 чисел есть в записи единица,
   • у 19 чисел есть в записи двойка,
   • у 30 чисел в записи нет ни единицы, ни двойки.
   Сколько чисел стёр Серёжа?
   Ответ. 33.
   Решение. Среди чисел от 1 до 100 единицу в записи содержит ровно двадцать: сама единица, десять чисел от 10 до 19, числа 21, 31, ..., 91 (их восемь) и число 100. Значит, ни одно из этих чисел не было стёрто. Аналогично, чисел с двойкой ровно девятнадцать: сама двойка, десять чисел третьего десятка, а также 12, 32, 42, ..., 92 (таких восемь). То есть и из них Серёжа ни одно не стёр. Всего таких чисел $19+20-2=37$ (мы вычитаем 2, поскольку числа 12 и 21 посчитаны два раза). Всего осталось $37+30=67$ чисел, а Серёжа стёр $100-67=33$ числа.
   Комментарии.

2. **Условие.** Серёжа обвёл чёрной ручкой на клетчатом листе бумаги прямоугольник 6×7 клеток. Луиза хочет нарисовать внутри него синий квадратик, а внутри синего — красный квадратик. При этом все прямоугольники рисуются по клеточкам, а обводить уже нарисованные линии нельзя. Сколько разных картинок у неё может получиться?
   Ответ. 16.
   Решение. Есть 6 способов нарисовать по правилам синий квадратик 3×3, в этом случае красный квадрат 1×1 дорисовывается однозначно (в центральную клетку синего). Кроме того, есть 2 способа нарисовать синий квадрат 4×4, в каждом из этих случаев есть 5 способов нарисовать внутри него красный квадрат: либо центральный квадрат 2×2 (1 способ), либо квадрат 1×1 в любой из 4 центральных клеток (4 способа). Итого получаем $6+2\cdot 5=16$ способов.
   Комментарии.

3. **Условие.** Учитель написал на доске натуральное число и попросил 30 своих учеников подумать про его делители.
   Первый ученик сказал: «Написанное число делится на 2.»
   Второй ученик сказал: «Написанное число делится на 3.»
   Третий ученик сказал: «Написанное число делится на 4.»
   ...
   Тридцатый ученик сказал: «Написанное число делится на 31.»
   Известно, что ровно два ученика сказали неправду, причем они стоят подряд. Определите, кто из учеников солгал.
   Ответ. 16 и 17 ученики.
   Решение. Два ученика, которые солгали, идут подряд. Значит, один из них утверждает, что написанное на доске число n не делится на какое-то четное число — $2k$. Пусть $2k$ делится на какой-то нечетный делитель, возьмем наибольший из них — d. По заявлениям учеников d и $2k/d$, число n должно делиться на оба из них. Тогда число n должно делиться на $2k$, противоречие. Значит, $2k$ — это степень двойки. Поэтому $2k$ должно быть наибольшей степенью двойки среди чисел от 1 до 31. Следовательно, $2k=16$. Второй совравший человек с номером 15 или 17. Очевидно, что 15 не подходит, так как число составное (n делится на 3 и 5, значит делится и на 15). Поэтому второй совравший человек с номером 17.
   Комментарии.

4. **Условие.** В озере живет 40 рыб — караси, лещи, щуки и окуни. Ежегодно они устраивают бал-маскарад: каждый надевает маску рыбы другого вида, причем два года подряд они одну и ту же маску не носят. Два года назад на балу было 12 «карасей» и 28 «лещей», год назад — 15 «окуней», 10 «карасей» и 15 «щук» а в этом году — 15 «щук» и 25 «карасей». Каких рыб в озере больше всего?
Ответ. Окуней.
Решение. Посмотрим на «щук». Последние два года в масках щук было 30 рыб. Всё это разные рыбы, так как никто два года подряд маску щуки не наденет. И это не щуки. Значит в озере есть по крайней мере 30 не-щук, то есть щук не более $40 - 30 = 10$. Такое же рассуждение про рыб, которые два последних года были на празднике «карасями», показывает, что настоящих карасей не более чем $40 - 10 - 25 = 5$. Два года назад на маскараде было 28 «лещей», и всё это были не настоящие лещи, настоящих же не более $40 - 28 = 12$. Итак, лещей, щук и карасей вместе не более чем $12 + 5 + 10 = 27$. Это значит, что окуней как минимум $40 - 27 = 13$, и это самый многочисленный вид рыб в озере.

	Караси	**Лещи**	**Щуки**	**Окуни**
Два года назад	12	28		
Год назад	10		15	15
Этот год	25		15	

Комментарии.

5. **Условие.** Есть 19 монет, из которых одна фальшивая и весит легче настоящих, а все настоящие весят поровну. Имеются также двое двухчашечных весов. Весы ломаются, если одна чаша на них перевесит другую (но при этом показывают, какая чаша тяжелее). Можно ли за 3 взвешивания определить фальшивую монету (возможно, поломав в итоге весы)?
Ответ. Да, это можно сделать.
Решение. Заметим, что если бы у нас было не 19, а всего 9 монет, из которых нужно выбрать фальшивую, то мы справились бы за два взвешивания. Для этого нужно разбить монеты на 3 группы по 3 монеты и взвесить друг с другом две из этих групп, после чего мы определим, в какой из трёх групп фальшивая монета (в более легкой, или в третьей группе, если первые две оказались равны по весу), а затем на вторых весах аналогичным образом из трёх монет найдем ту, что легче двух других.

   Теперь вернёмся к 19 монетам. Покажем, как можно справиться за три взвешивания. Действительно, положим на две чаши весов по 5 монет. Имеются два случая:

   1. Весы остались в равновесии (и в рабочем состоянии).
   Значит, фальшивая монета среди 9 невзвешенных, и её (см. выше) мы сможем отыскать среди них за два оставшихся взвешивания с двумя весами.

   2. Одна чаша перевесила, весы сломались.
   В этом случае мы остались с одними весами и пятью монетами (с взлетевшей вверх чашки), среди которых заведомо есть фальшивая. Взвесим 1-ю из них со второй, затем (если весы не сломались) 3-ю с 4-ой. Либо в какое-то из этих взвешиваний фальшивая монета обнаружится как более легкая, либо оба раза наступит равновесие, и значит фальшивая монета — оставшаяся.
   Комментарии.

6. **Условие.** Сколькими способами числа от 1 до 20 можно разбить на 10 пар так, чтобы в каждои паре большее число хотя бы в два раза превышало меньшее?
Ответ. $(5!)^2$
Решение. Заметим, что числа от 11 до 20 должны быть большими в своих парах. А значит, остальные числа — меньшие в своих парах. Тогда в паре с 10 обязательно должно быть 20 , в паре с $9 - 18$ или 19 (2 варианта), в паре с $8 - 16, 17, 18$ или 19 (3 варианта, т.к. один уже задействован). В паре с 7 может быть четыре числа (семь чисел от 14 до 20 , из которых три уже задействовано), в паре с 6 — пять чисел (уже задействовано четыре из девяти чисел от 12 до 20). После этого в парах с числами $5, 4, 3, 2, 1$ могут быть любые незадействованные числа от 11 до 20. Это $5, 4, 3, 2$ и 1 вариант соответственно. Следовательно, ответ в задаче $1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = (5!)^2$.
Комментарии.