

Вступительная олимпиада 2024/2025 учебного года

7 класс, письменный тур 22.09.2024. Все задачи и решения

1. **В-1.** В первом ряду зрительного зала сидят мальчики и девочки, чередуясь: девочка, мальчик, девочка, мальчик и т. д. Сколько мальчиков сидит на местах с 23 по 49 включительно, если известно, что на кресле с номером 5 сидит девочка?

В-2. В первом ряду зрительного зала сидят девочки и мальчики, чередуясь: мальчик, девочка, мальчик, девочка и т. д. Сколько девочек сидит на местах с 17 по 59 включительно, если известно, что на кресле с номером 7 сидит мальчик?

Ответ В-1. 13.

Ответ В-2. 21.

Решение.

В-1. Сначала вычисляем сколько человек сидит с 23 по 49 место: $49 - 22 = 27$. Ясно, что на нечётных местах сидят девочки, значит, края промежутка от 23 до 49 заняты девочками, следовательно, их 14, а мальчиков 13.

В-2. Сначала вычисляем сколько человек сидит с 17 по 59 место: $59 - 16 = 43$. Ясно, что на нечётных местах сидят мальчики, значит, края промежутка от 17 до 59 заняты мальчиками, следовательно их 22, а девочек 21.

2. **В-1.** Школа выдала каждому победителю олимпиады 5 блокнотов и 10 ручек, каждому призёру — 3 блокнота и 8 ручек, и всем остальным участникам — по 1 блокноту и по 6 ручек. Всего школа выдала 200 блокнотов и 600 ручек. Сколько школьников участвовали в олимпиаде?

В-2. Школа выдала каждому победителю олимпиады 8 блокнотов и 12 ручек, каждому призёру — 5 блокнотов и 9 ручек, и всем остальным участникам — по 3 блокнота и по 7 ручек. Всего школа выдала 400 блокнотов и 800 ручек. Сколько школьников участвовало в олимпиаде?

Ответ В-1. 80 школьников.

Ответ В-2. 100 школьников.

Решение.

В-1. Заметим, что количества блокнотов и ручек у всех участников различается на 5. Поскольку всего ручек на $600 - 200 = 400$ больше, чем блокнотов, то общее количество участников равно $400 : 5 = 80$.

В-2. Заметим, что количества блокнотов и ручек у всех участников различается на 4. Поскольку всего ручек на $800 - 400 = 400$ больше, чем блокнотов, то общее количество участников равно $400 : 4 = 100$.

3. **В-1.** Вася написал на доске некоторое число, а хулиган Петя заменил каждую из его цифр буквой, причём одинаковые цифры он заменял одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось слово АГРОТЕХНИКА. Оказалось, что если стереть в нём все буквы А, то новое число будет делиться на 9. Какую цифру Петя заменил буквой А в исходном числе?

В-2. Вася написал на доске некоторое число, а хулиган Петя заменил каждую из его цифр буквой, причём одинаковые цифры он заменял одинаковыми буквами, а разные — разными. Получилось слово ЗНАМЕНОСЕЦ. Известно, что в числе Васи не было цифры 4. Оказалось, что если стереть в нём все буквы Н, то новое число будет делиться на 9. Какую цифру Петя заменил буквой Н в исходном числе?

Ответ В-1. $A = 9$.

Ответ В-2. Н - любая, кроме 4.

Решение.

В-1. Заметим, что в слове АГРОТЕХНИКА всего 10 различных букв, стало быть в исходном числе присутствовали все 10 цифр. После вычёркивания букв А останется всего 9 различных цифр. Сумма $0 + 1 + \dots + 9 = 45$, значит, сумма цифр после вычёркивания букв А будет равняться $45 - А$. По условию задачи последняя сумма обязана делиться на 9, что возможно только в случаях $А = 0$ и $А = 9$. Первый из этих случаев невозможен в силу того, что А стоит в начале слова.

В-2. Раз число после вычёркивания обеих букв Н делится на 9, значит и его сумма цифр делится на 9. В таблице для каждого Н приведены значения остальных букв так, чтобы получившееся после вычёркивания число имело сумму цифр кратную 9. Принимался хотя бы один верный ответ.

Н	З	А	М	О	С	Ц	Е (x2)	Сумма без Н
0	2	8	3	7	9	5	1	36
1	2	7	3	6	0	8	5	36
2	8	0	1	7	3	5	6	36
3	2	5	6	0	8	1	7	36
5	3	2	6	1	7	8	0	27
6	8	3	5	2	7	0	1	27
7	1	8	3	5	0	6	2	27
8	1	2	0	5	6	7	3	27
9	1	8	2	7	3	6	0	27

4. **В-1.** Четыре кота — Артём, Борис, Вася и Гоша — обсуждали, кто из них толще. Каждый из них высказал по два утверждения:

Артём: «Я самый толстый». «Гоша самый худой»;

Борис: «Вася толще меня». «Зато я толще Артёма»;

Вася: «Я самый толстый». «Гоша толще Артёма»;

Гоша: «Борис толще меня». «Но я не самый худой».

Когда коты по очереди взвесились на весах, выяснилось, что каждый из них один раз сказал правду, а один раз ошибся. Расположите котов по увеличению толщины от самого худого к самому толстому. *В ответе напишите последовательность из первых букв имён котов. Например, АБВГ.*

В-2. Четыре школьника, принявшие участие в соревновании по бегу — Артём, Борис, Вася и Гоша — обсуждали, кто из них какое место занял. Каждый из них высказал по два утверждения: Артём: «Я прибежал первым». «Гоша прибежал последним»;

Борис: «Вася прибежал раньше меня». «Зато я раньше Артёма»;

Вася: «Я прибежал первым». «Гоша прибежал раньше Артёма»;

Гоша: «Борис прибежал раньше меня». «Но я не последний».

Оказалось, что каждый из них один раз сказал правду, а один раз ошибся. В каком порядке от первого к последнему прибежали мальчики? *В ответе напишите последовательность из первых букв имён мальчиков. Например, АБВГ.*

Ответ В-1. Ответ вариант 1. Гоша, Борис, Артём, Вася.

Ответ В-2. Ответ вариант 2. Вася, Артём, Борис, Гоша.

Решение.

В-1. Посмотрим на кота Артёма. Если его фраза «Я самый толстый» верна, а «Гоша — самый худой» ложна, то фраза Васи «Я самый толстый» ложна, так как самый толстый кот — Артём. Но и фраза «Гоша толще Артёма» — тоже ложь по той же причине. Этот случай невозможен.

Следовательно, первая фраза Артёма «Я самый толстый» — ложь, а «Гоша — самый худой» — правда. Посмотрим на слова кота Васи. Так как Гоша — самый худой, то фраза

«Гоша толще Артёма» — ложь, поэтому фраза «Я самый толстый» верна. Таким образом, мы знаем, что Гоша — самый худой, а Вася — самый толстый.

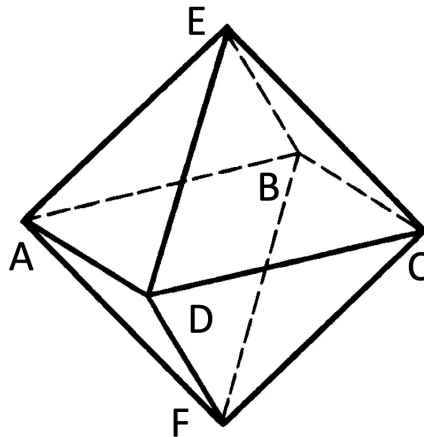
Посмотрим на слова кота Бориса. Так как Вася толще всех, то фраза «Вася толще меня» верная. Тогда «Зато я толще Артёма» — ложь. Следовательно, Борис более худой кот, чем Артём. Отсюда получается ответ.

В-2. Рассмотрим высказывания Артёма. Если его фраза «Я прибежал первым» верна, а фраза «Гоша прибежал последним» ложна, то фраза Васи «Я прибежал первым» ложна, так как первым прибежал Артём. Но и фраза «Гоша прибежал раньше Артёма» — тоже ложь по той же причине. Этот случай невозможен.

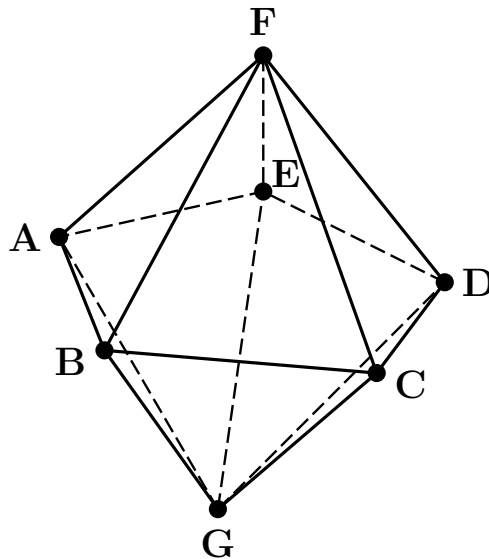
Следовательно, первая фраза Артёма «Я прибежал первым» — ложь, а «Гоша прибежал последним» — правда. Рассмотрим высказывания Васи. Так как Гоша прибежал последним, то фраза «Гоша прибежал раньше Артёма» — ложь, поэтому фраза Васи «Я прибежал первым» верна. Таким образом, мы знаем, что Гоша прибежал последним, а Вася — первым.

Рассмотрим утверждения Бориса. Так как Вася прибежал первым, то фраза Бориса «Вася прибежал раньше меня» верна. Тогда его же фраза «Зато я раньше Артёма» — ложь. Следовательно, Борис прибежал позже, чем Артём. Отсюда получается ответ.

5. **В-1.** На рисунке изображён каркас октаэдра. В вершине E находится жук, который может ползать по рёбрам, причём перемещаться он может только вниз или по сторонам квадрата $ABCD$. Сколько существует способов добраться из E в F , если посещать одну и ту же вершину дважды ему запрещено?



В-2. На рисунке изображён каркас некоторого бриллианта. В вершине F находится жук, который может ползать по рёбрам, причём перемещаться он может только вниз или по сторонам пятиугольника $ABCDE$. Сколько существует способов добраться из F в G , если посещать одну и ту же вершину дважды ему запрещено?



Ответ В-1. 28.

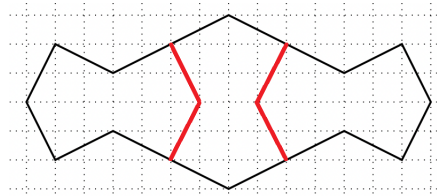
Ответ В-2. 45.

Решение.

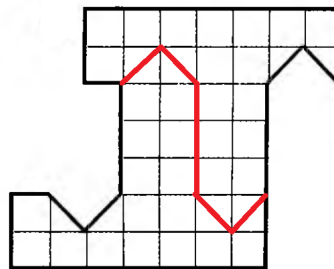
В-1. У жука есть 4 способа попасть из вершины E на четырёхугольник $ABCD$. Далее жук может либо сразу спуститься к вершине F , либо дойти до другой точки четырёхугольника $ABCD$ по часовой или против часовой стрелки и спуститься к вершине F . Итого получаем $4 \cdot (1 + 2 \cdot 3) = 28$ способов.

В-2. У жука есть 5 способа попасть из вершины F на пятиугольник $ABCDE$. Далее жук может либо сразу спуститься к вершине G , либо дойти до другой точки пятиугольника $ABCDE$ по часовой или против часовой стрелки и спуститься к вершине G . Итого получаем $5 \cdot (1 + 2 \cdot 4) = 45$ способов.

6. **В-1.** Разрежьте фигуру на три равные части. Можно резать не только по линиям сетки. На рисунке ниже представлены несколько копий этой фигуры.



В-2. Разрежьте фигуру на две одинаковые части. Резать можно не только по линиям сетки. На рисунке ниже представлены несколько копий этой фигуры.



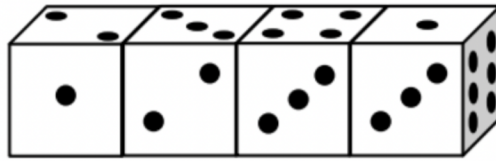
Ответ В-1. Ответ вариант 1. см. картинку

Ответ В-2. Ответ вариант 2. см. картинку

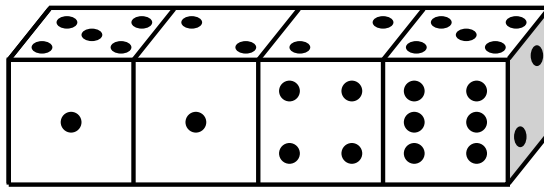
Решение. Решение. см. картинку

7. **В-1.** У Луизы есть 4 белых кубика $1 \times 1 \times 1$. Серёжа взял один кубик и нарисовал 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точек на разных гранях. Такую же операцию он повторил с остальными тремя.

В итоге расположения точек на всех кубиках получились одинаковыми. Луиза склеила их так, как показано на рисунке. Сколько всего точек находится на поверхности всех шести граней получившегося брусочка $1 \times 1 \times 4$?



В-2. У Луизы есть 4 белых кубика $1 \times 1 \times 1$. Серёжа взял один кубик и нарисовал 1, 2, 3, 4, 5 и 6 точек на разных гранях. Такую же операцию он повторил с остальными тремя. В итоге расположения точек на всех кубиках получились одинаковыми. Луиза склеила их так, как показано на рисунке. Сколько всего точек находится на поверхности всех шести граней получившегося брусочка $1 \times 1 \times 4$?



Ответ В-1. Ответ вариант 1. 64

Ответ В-2. Ответ вариант 2. 62

Решение.

В-1. По данным рисунка кубик восстанавливается однозначно. Двойка соседствует по грани как с тройкой, так и с единицей, значит двойка на кубике нарисована напротив шестёрки. Четвёрка соседствует с тройкой, значит нарисована напротив единицы. Методом исключения получаем, что пятёрка нарисована напротив тройки. Итого соответствие противоположных граней выглядит следующим образом:

$$1 - 4, \quad 2 - 6, \quad 3 - 5$$

Далее остаётся сложить все точки на внешних гранях получившегося брусочка:

$$\text{Верхняя: } 2 + 3 + 4 + 1 = 10$$

$$\text{Передняя: } 1 + 2 + 3 + 3 = 9$$

$$\text{Нижняя: } 6 + 5 + 1 + 4 = 16$$

$$\text{Тыльная: } 4 + 6 + 5 + 5 = 20$$

$$\text{Два торца: } 6 + 3 = 9$$

$$\text{Итого сумма точек на поверхности брусочка равняется } 10 + 9 + 16 + 20 + 9 = 64$$

В-2. По данным рисунка кубик восстанавливается однозначно. Единица соседствует по грани как с пятёркой, так и с двойкой, значит единица нарисована на кубике напротив шестёрки. Четвёрка соседствует с двойкой, значит четвёрка нарисована на кубике напротив пятёрки. Методом исключения получаем, что тройка нарисована напротив двойки. Итого соответствие противоположных граней выглядит следующим образом:

$$1 - 6, \quad 2 - 3, \quad 4 - 5$$

Далее остаётся сложить все точки на внешних гранях получившегося брусочка:

$$\text{Верхняя: } 5 + 2 + 2 + 5 = 14$$

$$\text{Передняя: } 1 + 1 + 4 + 6 = 12$$

Нижняя: $4 + 3 + 3 + 4 = 14$

Тыльная: $6 + 6 + 5 + 1 = 18$

Два торца: $2 + 2 = 4$

Итого сумма точек на поверхности брусочка равняется $14 + 12 + 14 + 18 + 4 = 62$

8. **В-1.** Четыре стрелка стреляли по специальным мишеням, попадание в центр которых приносило 12 очков, а дальше шли концентрические области, приносящие стрелку от 11 до 0 очков. Каждый сделал три выстрела. Все выстрелы попали в разные области, но каждый стрелок набрал одну и ту же сумму очков. Известно, что Амир попал в область цифры 2, Боря — в 10, Коля — в 0. Укажите все области, куда попал четвёртый стрелок.

В-2. Четыре стрелка стреляли по специальным мишеням, попадание в центр которых приносило 12 очков, а дальше шли концентрические области, приносящие стрелку от 11 до 0 очков. Каждый сделал три выстрела. Все выстрелы попали в разные области, но каждый стрелок набрал одну и ту же сумму очков. Известно, что Амир попал в область цифры 0, Боря — в 6, Коля — в 2 и в центр. Укажите все области, куда попал четвёртый стрелок.

Ответ В-1. 1, 8, 9.

Ответ В-2. 1, 5, 11.

Решение.

В-1. Только один из возможных результатов от 0 до 12 не был «реализован». Сумма этих чисел равна 78, а сумма всех результатов кратна 4. Значит, нереализованный результат чётен и не кратен 4, т.е. это 6, а сумма каждого стрелка равна $72 : 4 = 18$. Осталось «распределить» числа 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11, 12. Коле два выстрела принесли 18 очков, единственная возможность: $7 + 11$. Боря за два выстрела набрал 8 очков: $3 + 5$. Из оставшихся чисел сумма 16 для Амира получается только как $12 + 4$.

В-2. Только один из возможных результатов от 0 до 12 не был «реализован». Сумма этих чисел равна 78, а сумма всех результатов кратна 4. Значит, нереализованный результат чётен и не кратен 4, т.е. это 10, а сумма очков каждого стрелка равна $68 : 4 = 17$. Осталось «распределить» числа 1, 3, 4, 5, 7, 8, 9, 11. Коле последний выстрел принёс 3 очка. Боря за два выстрела набрал 11 очков: $7 + 4$. Из оставшихся чисел сумма 17 для Амира получается только как $8 + 9$.