Чётность. Решения

4.1. Сколькими способами можно собрать нечётное число копеек, если есть монеты 1, 5, 10 и 50 копеек? Десяти- и пятидесятикопеечных монет по 10, остальных по одной. Монеты одного достоинства считать одинаковыми.

Решение: Чтобы сумма была нечётной, нужно использовать ровно одну монету нечётного достоинства и любое количество монет чётного достоинства: от 0 до 10 каждого достоинства. Итого $2 \cdot 11 \cdot 11 = 242$ способа.

4.2. Сидел князь Горох в Гороховце, сидел мирно, завещал княжество троим сыновьям своим и наказал им жить мирно. И жили они мирно, и делили уделы свои между сынами своими, а сынов числом трое или пятеро, и завещали жить мирно, и царил мир на той земле, покуда не умер князь Чет Горохович, оставив удел свой четверым сыновьям. В тот же год налетела орда чёрная и покорила все уделы Гороховичей, числом их тридцать три. Не вкралась ли в летопись ошибка?

Решение: Количество уделов каждый раз оставалось нечётным, пока Чет Горохович не разделил свой на четверых. В этот момент оно стало чётным, а 33 — нечётное число. Значит, в летописи ошибка.

4.3. Настя каждый день в октябре читала книжки и записывала число прочитанных страниц за день. К утру 24 октября она прочитала 2026 страниц. Может ли произведение записанных чисел быть нечётным?

Решение: Пусть может, тогда среди них нет чётных чисел. Тогда заметим, что всего у нас 23 нечётных числа, значит их сумма должна быть нечётной, а 2026 — чётное. Противоречие.

4.4. Фокусник взял из колоды 10 различных карт и показывает зрителям разнообразные тройки карт. В какой-то момент помощник фокусника объявляет, что зрители видели все возможные пары карт, причём каждую пару — ровно по разу. Не обманывает ли помощник зрителей?

Решение: Пусть не обманывает. Тогда первая карта появлялась с каждой из 9 других, но каждый раз она бывала ровно с 2 новыми.

4.5. Город Квадратный окружён Большим Квадратным бульваром. Места, где выезды из города пересекаются с бульваром, называются заставами или воротами. Застав и ворот по 13. Докажите, что у какого-то выезда оба соседних называются заставами.

Решение: Пусть такого выезда нет, тогда заставы встречаются не более чем по 2 подряд. С другой стороны, ворота встречаются хотя бы по 2 подряд. Будем называть подряд встречающиеся одноимённые выезды группой. Группы чередуются, значит их поровну, значит в каждой группе по 2 выезда. 13 нечётно, противоречие.

4.6. Произведение 2026 целых чисел равно единице. Докажите, что их сумма не равна нулю.

Решение: Если сумма равна нулю, то единиц столько же, сколько минус единиц. Тогда их по 1013 и произведение равно -1.

4.7. В таблицу 14×14 записали 196 последовательных натуральных чисел. Могло ли получиться так, что суммы в соседних столбцах отличаются ровно на единицу?

Решение: Пусть могло, тогда столбцов с нечётной суммой 7 и сумма в таблице нечётна. С другой стороны, она чётна, так как чётных и нечётных чисел в ней поровну.

4.8. Гадалка обещает Игорю, что в октябре его ожидает великое счастье. Чтобы узнать, в какой день, нужно перемешать листы отрывного календаря за октябрь, перевернуть, написать на обратных сторонах числа от 1 до 31, вновь перевернуть и собрать в стопку с 1 числа. Затем нужно брать листы по одному, складывать число на обратной стороне с номером дня, и домножать на имеющееся произведение (первого октября оно равно сумме 1 и числа на обратной стороне). В какой день произведение станет чётным, тогда и счастье привалит. Докажите, что этот день наступит.

Решение: Пусть нет, тогда в любой день сумма нечётна. В октябре 16 нечётных чисел, каждому из них должно соответствовать чётное с обратной стороны, а таких всего 15.

4.9. Степан выбрал натуральное число и начал выписывать подряд натуральные числа, начиная с него. Каждый раз, когда количество чётных чисел составляло целое число процентов от количества всех выписанных, он запоминал их количество. Некоторые числа он запомнил больше одного раза. Какие?

Решение: Каждое натуральное число он запомнил минимум один раз: если чисел поровну, то чётных

50%. Пусть чётных чисел m, а нечётных какое-то другое количество. Их может быть $m-1$, если он начал с чётного, тогда верно

$$\frac{n}{100} = \frac{m}{2m-1}$$

$$n\,(2m-1) = 100m$$

$$n = 2m\,(n-50)$$

Так как $2m-1$ гарантированно нечётное, n должно делиться на 4. Также n делится на $n-50$. Так как $101 > n > 50$, можем просто перебрать все возможные n. $n = 52$, $m = 13$, $n = 60, m = 3$, $n = 100, m = 1$.

Заметим теперь, что случай начала с нечётного симметричен, так что нужно добавить $m = 2$, 12. Ноль не добавляем, так как ноль запоминался только единожды.

4.10. Город Квадратный состоит из 49 районов (не обязательно квадратных). На день города провели конкурс «Раскрась свой город!»: необходимо раскрасить районы на карте города в зелёный, синий и красный цвета (можно было использовать один, два или три цвета) таким образом, чтобы каждый район был окрашен в один цвет, а синие районы не граничили с красными. Докажите, что количество возможных раскрасок нечётно.

Решение: Каждая правильная раскраска имеет пару, получаемую заменой красного на синий. Остаётся ещё полностью зелёная раскраска, которая такой пары не имеет.

4.11. Было у великого султана 100 колдунов. Все они, конечно же, были шарлатанами, и султан это заподозрил. Собрал он их и сказал: «Завтра поутру устроим вам проверку, кто настоящий колдун, а кто нет. Проверка будет такой. Выведут вас в поле, построят в ряд. Потом каждому на голову наденут колпак либо чёрного, либо белого цвета. И, начиная с конца ряда, к каждому из вас по очереди будет подходить палач с топором, спрашивая, какого цвета колпак у вас на голове. Тем, кто назовёт цвет своего колпака неверно, прямо на месте отрубят голову, остальных отпустят». Услышав такую новость, колдуны собрались и задумались, как им действовать, чтобы спасти наибольшее число своих коллег. Сколько колдунов точно можно спасти в таких условиях?

Решение: Первый отвечающий видит колпаки остальных 99 колдунов. Колдуны могут договориться, что он скажет «чёрный», если среди видимых им чёрных колпаков чётное число, и «белый», если нечётное. Сам он при этом может ошибиться. Каждый следующий колдун уже знает сообщённую первым чётность, слышит ответы предыдущих и видит колпаки стоящих перед ним, поэтому может однозначно определить цвет своего колпака. Значит, все колдуны, кроме первого отвечающего, гарантированно спасутся.