

Чётность

4.1. Сколькими способами можно собрать нечётное число копеек, если есть монеты 1, 5, 10 и 50 копеек? Десяти- и пятидесятикопеечных монет по 10, остальных по одной. Монеты одного достоинства считать одинаковыми.

4.2. Сидел князь Горох в Гороховце, сидел мирно, завещал княжество троим сыновьям своим и наказал им жить мирно. И жили они мирно, и делили уделы свои между сынами своими, а сынов числом трое или пятеро, и завещали жить мирно, и царил мир на той земле, покуда не умер князь Чет Горохович, оставив удел свой четверым сыновьям. В тот же год налетела орда чёрная и покорила все уделы Гороховичей, числом их тридцать три. Не вкралась ли в летопись ошибка?

4.3. Настя каждый день в октябре читала книжки и записывала число прочитанных страниц за день. К утру 24 октября она прочитала 2026 страниц. Может ли произведение записанных чисел быть нечётным?

4.4. Фокусник взял из колоды 10 различных карт и показывает зрителям разнообразные тройки карт. В какой-то момент помощник фокусника объявляет, что зрители видели все возможные пары карт, причём каждую пару — ровно по разу. Не обманывает ли помощник зрителей?

4.5. Город Квадратный окружён Большим Квадратным бульваром. Места, где выезды из города пересекаются с бульваром, называются заставами или воротами. Застав и ворот по 13. Докажите, что у какого-то выезда оба соседних называются заставами.

4.6. Произведение 2026 целых чисел равно единице. Докажите, что их сумма не равна нулю.

4.7. В таблицу 14×14 записали 196 последовательных натуральных чисел. Могло ли получиться так, что суммы в соседних столбцах отличаются ровно на единицу?

4.8. Гадалка обещает Игорю, что в октябре его ожидает великое счастье. Чтобы узнать, в какой день, нужно перемешать листы отрывного календаря за октябрь, перевернуть, написать на обратных сторонах числа от 1 до 31, вновь перевернуть и собрать в стопку с 1 числа. Затем нужно брать листы по одному, складывать число на обратной стороне с номером дня, и домножать на имеющееся произведение (первого октября оно равно сумме 1 и числа на обратной стороне). В какой день произведение станет чётным, тогда и счастье привалит. Докажите, что этот день наступит.

4.9. Степан выбрал натуральное число и начал выписывать подряд натуральные числа, начиная с него. Каждый раз, когда количество чётных чисел составляло целое число процентов от количества всех выписанных, он запоминал их количество. Некоторые числа он запомнил больше одного раза. Какие?

4.10. Город Квадратный состоит из 49 районов (не обязательно квадратных). На день города провели конкурс «Раскрась свой город!»: необходимо раскрасить районы на карте города в зелёный, синий и красный цвета (можно было использовать один, два или три цвета) таким образом, чтобы каждый район был окрашен в один цвет, а синие районы не граничили с красными. Докажите, что количество возможных раскрасок нечётно.

4.11*. Было у великого султана 100 колдунов. Все они, конечно же, были шарлатанами, и султан это заподозрил. Собрал он их и сказал: «Завтра поутру устроим вам проверку, кто настоящий колдун, а кто нет. Проверка будет такой. Выведут вас в поле, построят в ряд. Потом каждому на голову наденут колпак либо чёрного, либо белого цвета. И, начиная с конца ряда, к каждому из вас по очереди будет подходить палач с топором, спрашивая, какого цвета колпак у вас на голове. Тем, кто назовёт цвет своего колпака неверно, прямо на месте отрубят голову, остальных отпустят». Услышав такую новость, колдуны собрались и задумались, как им действовать, чтобы спасти наибольшее число своих коллег. Сколько колдунов точно можно спасти в таких условиях?