9. Делимость. Решения

9.0. Докажите, что если a делится на 3, b делится на 3, то и их сумма будет делиться на 3. Что можете сказать про их разность, а про произведение?

Решение: $a = 3c$, $b = 3d$, а значит $a + b = 3(c + d)$ — делится на 3, аналогично для разности. $a \cdot b = 3c \cdot 3d = 9cd$ — делится на 9.

9.1. Из утверждений «число a делится на 3», «число a делится на 6», «число a делится на 12» и «число a делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?

Решение: Если бы утверждение «число a делится на 24» было бы верным, то верными были бы и все остальные — противоречие.

Ответ: «число a делится на 24».

9.2. Волшебник Гудвин проверяет, как работают магические законы с числами. Помогите ему ответить на два вопроса:

a) Если магическое число A делится и на 3, и на 4, обязательно ли оно делится на 12?

b) Если магическое число A делится и на 4, и на 6, обязательно ли оно делится на 24?

Решение:

a) Да, поскольку 3 и 4 не имеют общих делителей больших 1.

b) Нет, например, число 12.

9.3. Волшебник Гудвин дал Страшиле задание: расставить по кругу 10 волшебных камней для нового заклинания. Среди них есть: 4 изумруда (сила 1), 3 рубина (сила 2), 3 сапфира (сила 3). Заклинание будет работать, если сумма силы любых трёх подряд лежащих камней **НЕ** будет делиться на 3. Помогите Страшиле расставить камни правильным образом!

Решение: Картинка

9.4. Тотошка, путешествуя по дороге из жёлтого кирпича, собирает волшебные сапфировые кристаллы. Число, которое он записывает в дорожный журнал, — это количество найденных кристаллов. Мудрая Виллина говорит, что особую силу имеют только те записи, произведение цифр которых равно определённому магическому числу.

a) Существует ли запись в журнале (натуральное число), произведение цифр которого равно 2025?

b) Существует ли запись в журнале (натуральное число), произведение цифр которого равно 2026?

Решение:

a) Да, например, 5599.

b) Нет, поскольку при разложении 2026 на простые будет множитель больше 10

9.5. Волшебница Виллина посадила удивительное дерево, которое каждый день приносит магические изумруды. Количество изумрудов в день под номером n можно вычислить по формуле: $n^2 + n + 41$. Виллина уверена, что это число всегда будет простым. Права ли она?

Решение: Нет, например на 41 день число будет делиться на 41.

9.6. Великий Гудвин пронумеровал 9 волшебных изумрудных шаров последовательными натуральными числами. Пока он отвернулся, один шар пропал. Гудвин сложил номера оставшихся восьми шаров и получил 2025. Под каким номером был пропавший шар?

Решение: Пусть x — номер самого маленького шара. Пропавший шар имеет номер $x + y$, где y — целое число от 0 до 8. Сумма номеров всех девяти шаров: $x+(x+1)+\ldots+(x+8) = 9x+36$. Если вычесть пропавший шар, получим: $(9x+36)-(x+y)=2025$. Упростим: $8x+36-y=2025 \to 8x=1989+y$. Число $1989+y$ должно делиться на 8. Проверяя возможные y, находим, что подходит только $y=3$ (так как $1989+3=1992$, а $1992/8=249$). Значит, $x=249$, а пропавший шар имел номер $249+3=252$.

Ответ: 252.

9.7. В замке Гудвина хранилось несколько целых изумрудов. Однажды ночью туда пробрались мыши-сапожники, чтобы сделать себе новую обувь. Они унесли 10 изумрудов, причём каждая мышь утащила одинаковое количество. От такой напряжённой работы несколько мышей так устали, что на следующую ночь не смогли выйти на работу. Оставшиеся семь мышей снова пробрались в подвал и забрали все оставшиеся изумруды. Но на этот раз каждая мышь смогла унести в два раза меньше изумрудов, чем в первую ночь. Сколько волшебных изумрудов хранилось в подвале изначально?

Решение: Пусть всего было k мышей-сапожников ($k>7$), тогда каждая унесла в первую ночь по $10/k$ изумрудов. Во вторую ночь каждая мышь — сапожник унесла вдвое меньше, то есть $5/k$ изумрудов. Семь мышей унесли тем самым $35/k$ изумрудов. Это целое число. Единственный делитель числа 35, превышающий 7, — само число 35. Поэтому $35/k=1$, и всего на складе до нашествия мышей-сапожников было $10+1=11$ изумрудов.

9.8. Железный Дровосек нашёл сундук с золотыми монетами. Число монет A в сундуке таково, что сумма трёх самых маленьких его натуральных делителей равна 8. На сколько нулей может оканчиваться это число A?

Решение: Число 8 можно представить в виде суммы трёх различных натуральных чисел двумя способами: $8=1+2+5=1+3+4$. Числа 1, 3 и 4 не могут быть тремя наименьшими делителями числа A: если A делится на 4, то оно делится и на 2. Значит, три наименьших делителя A — это 1, 2 и 5. Таким образом, A делится на 10, но не делится на 4. Следовательно, число A оканчивается ровно на один нуль.

Ответ: на один.

9.9. Волшебник Гудвин дал Страшиле и Железному Дровосеку два волшебных рецепта, измеряемых в единицах изумрудной энергии. Рецепт Страшилы требует $6n+11m$ изумрудных пылинок, а дровосека требует $n+7m$ пылинок. Где n и m — натуральные числа. Гудвин обнаружил удивительную закономерность: если рецепт Страшилы требует количество пылинок, которое делится на 31, то и рецепт Дровосека требует количество пылинок, кратное 31.

Помогите Гудвину доказать, что эта магическая связь между рецептами работает всегда.

Решение: $31n+62m-5(6m+11n)=n+7m$. Поскольку $31n$, $62m$, $5(6m+11n)$ делятся на 31, то и $n+7m$ делится на 31.