

9. Делимость

Число a делится на число b , если существует такое число c , что $a = bc$. При этом числа b и c называются делителями числа a .

9.0. Докажите, что если a делится на 3, b делится на 3, то и их сумма будет делиться на 3. Что можете сказать про их разность, а про произведение?

9.1. Из утверждений «число a делится на 3», «число a делится на 6», «число a делится на 12» и «число a делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?

9.2. Волшебник Гудвин проверяет, как работают магические законы с числами. Помогите ему ответить на два вопроса:

- а) Если магическое число A делится и на 3, и на 4, обязательно ли оно делится на 12?
- б) Если магическое число A делится и на 4, и на 6, обязательно ли оно делится на 24?

9.3. Волшебник Гудвин дал Страшиле задание: расставить по кругу 10 волшебных камней для нового заклинания. Среди них есть: 4 изумруда (сила 1), 3 рубина (сила 2), 3 сапфира (сила 3). Заклинание будет работать, если сумма силы любых трёх подряд лежащих камней **НЕ** будет делиться на 3. Помогите Страшиле расставить камни правильным образом!

9.4. Тотошка, путешествуя по дороге из жёлтого кирпича, собирает волшебные сапфировые кристаллы. Число, которое он записывает в дорожный журнал, — это количество найденных кристаллов. Мудрая Виллина говорит, что особую силу имеют только те записи, произведение цифр которых равно определённому магическому числу.

- а) Существует ли запись в журнале (натуральное число), произведение цифр которого равно 2025?
- б) Существует ли запись в журнале (натуральное число), произведение цифр которого равно 2026?

9.5. Волшебница Виллина посадила удивительное дерево, которое каждый день приносит магические изумруды. Количество изумрудов в день под номером n можно вычислить по формуле: $n^2 + n + 41$. Виллина уверена, что это число всегда будет простым. Права ли она?

9.6. Великий Гудвин пронумеровал 9 волшебных изумрудных шаров последовательными натуральными числами. Пока он отвернулся, один шар пропал. Гудвин сложил номера оставшихся восьми шаров и получил 2025. Под каким номером был пропавший шар?

9.7. В замке Гудвина хранилось несколько целых изумрудов. Однажды ночью туда пробрались мыши-сапожники, чтобы сделать себе новую обувь. Они унесли 10 изумрудов, причём каждая мышь утащила одинаковое количество. От такой напряжённой работы несколько мышей так устали, что на следующую ночь не смогли выйти на работу. Оставшиеся семь мышей снова пробрались в подвал и забрали все оставшиеся изумруды. Но на этот раз каждая мышь смогла унести в два раза меньше изумрудов, чем в первую ночь. Сколько волшебных изумрудов хранилось в подвале изначально?

9.8. Железный Дровосек нашёл сундук с золотыми монетами. Число монет A в сундуке таково, что сумма трёх самых маленьких его натуральных делителей равна 8. На сколько нулей может оканчиваться это число A ?

9.9. Волшебник Гудвин дал Страшиле и Железному Дровосеку два волшебных рецепта, измеряемых в единицах изумрудной энергии. Рецепт Страшилы требует $6n + 11m$ изумрудных пылинок, а дровосека требует $n + 7m$ пылинок. Где n и m — натуральные числа. Гудвин обнаружил удивительную закономерность: если рецепт Страшилы требует количество пылинок, которое делится на 31, то и рецепт Дровосека требует количество пылинок, кратное 31. Помогите Гудвину доказать, что эта магическая связь между рецептами работает всегда.

9. Делимость

Число a делится на число b , если существует такое число c , что $a = bc$. При этом числа b и c называются делителями числа a .

9.0. Докажите, что если a делится на 3, b делится на 3, то и их сумма будет делиться на 3. Что можете сказать про их разность, а про произведение?

9.1. Из утверждений «число a делится на 3», «число a делится на 6», «число a делится на 12» и «число a делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?

9.2. Волшебник Гудвин проверяет, как работают магические законы с числами. Помогите ему ответить на два вопроса:

- а) Если магическое число A делится и на 3, и на 4, обязательно ли оно делится на 12?
- б) Если магическое число A делится и на 4, и на 6, обязательно ли оно делится на 24?

9.3. Волшебник Гудвин дал Страшиле задание: расставить по кругу 10 волшебных камней для нового заклинания. Среди них есть: 4 изумруда (сила 1), 3 рубина (сила 2), 3 сапфира (сила 3). Заклинание будет работать, если сумма силы любых трёх подряд лежащих камней **НЕ** будет делиться на 3. Помогите Страшиле расставить камни правильным образом!

9.4. Тотошка, путешествуя по дороге из жёлтого кирпича, собирает волшебные сапфировые кристаллы. Число, которое он записывает в дорожный журнал, — это количество найденных кристаллов. Мудрая Виллина говорит, что особую силу имеют только те записи, произведение цифр которых равно определённому магическому числу.

- а) Существует ли запись в журнале (натуральное число), произведение цифр которого равно 2025?
- б) Существует ли запись в журнале (натуральное число), произведение цифр которого равно 2026?

9.5. Волшебница Виллина посадила удивительное дерево, которое каждый день приносит магические изумруды. Количество изумрудов в день под номером n можно вычислить по формуле: $n^2 + n + 41$. Виллина уверена, что это число всегда будет простым. Права ли она?

9.6. Великий Гудвин пронумеровал 9 волшебных изумрудных шаров последовательными натуральными числами. Пока он отвернулся, один шар пропал. Гудвин сложил номера оставшихся восьми шаров и получил 2025. Под каким номером был пропавший шар?

9.7. В замке Гудвина хранилось несколько целых изумрудов. Однажды ночью туда пробрались мыши-сапожники, чтобы сделать себе новую обувь. Они унесли 10 изумрудов, причём каждая мышь утащила одинаковое количество. От такой напряжённой работы несколько мышей так устали, что на следующую ночь не смогли выйти на работу. Оставшиеся семь мышей снова пробрались в подвал и забрали все оставшиеся изумруды. Но на этот раз каждая мышь смогла унести в два раза меньше изумрудов, чем в первую ночь. Сколько волшебных изумрудов хранилось в подвале изначально?

9.8. Железный Дровосек нашёл сундук с золотыми монетами. Число монет A в сундуке таково, что сумма трёх самых маленьких его натуральных делителей равна 8. На сколько нулей может оканчиваться это число A ?

9.9. Волшебник Гудвин дал Страшиле и Железному Дровосеку два волшебных рецепта, измеряемых в единицах изумрудной энергии. Рецепт Страшилы требует $6n + 11m$ изумрудных пылинок, а дровосека требует $n + 7m$ пылинок. Где n и m — натуральные числа. Гудвин обнаружил удивительную закономерность: если рецепт Страшилы требует количество пылинок, которое делится на 31, то и рецепт Дровосека требует количество пылинок, кратное 31. Помогите Гудвину доказать, что эта магическая связь между рецептами работает всегда.