8. Комбинаторика. Решения

8.0.

a) Сколько существует трёхзначных чисел, записанных с помощью цифр 1, 4 и 7, если цифры не повторяются?

b) А сколько существует трёхзначных чисел, в которых нет четных цифр и цифры не повторяются?

Решение:

a) Воспользуемся принципом умножения. Первую цифру можно выбрать тремя вариантами, вторую - уже только двумя и третья остаётся последней, без выбора. Как можно заметить, суммарное количество вариантов равно $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$. Числа соответственно: 147, 174, 417, 471, 714, 741.

b) Действуя аналогично с предыдущим пунктом получим, что количество вариантов будет равно $5 \cdot 4 \cdot 3 = 60$.

8.1. В аудитории сидят школьники - четверо с чёрными волосами, шесть с рыжими и два блондина. Сколькими способами можно выбрать трёх учеников с волосами разного цвета?

Решение: Необходимо выбрать одного с чёрными, одного с рыжими и одного блондина. Ученика с чёрными волосами можно выбрать одним из четырех способов. Для каждого способа выбрать школьника с чёрными волосами есть по шесть способов выбрать школьника с рыжими волосами. Для каждого способа выбрать двух школьников с чёрными и с рыжими волосами есть по два способа выбрать блондина. Итого получаем $4 \cdot 6 \cdot 2 = 48$.

Ответ: 48.

8.2. Школьник Вася сидит на уроке и от скуки бросает монетку. Сколько разных последовательностей может получить Вася за три броска монеты если:

a) На монете ему может выпасть орёл и решка.

b) Помимо орла и решки она может упасть и на ребро.

Решение:

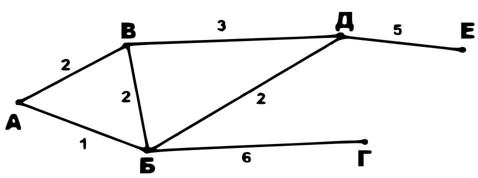
a) Вне зависимости от результатов предыдущих бросков, последующие всё так-же будут иметь по 2 варианта выпадения: орёл или решка. По формуле умножения суммарно количество вариантов равно $2 \cdot 2 \cdot 2 = 2^3 = 8$ вариантов

b) Аналогично предыдущему пункту всего $3 \cdot 3 \cdot 3 = 3^3 = 27$ вариантов.

Ответ: a) 8 b) 27.

8.3.

Дима идет на урок русского языка. В школе классы пронумерованы буквами и переходить между классами можно только если они соединены проходами. Если классы соединены, то над путем указано количество различных дорог между ними. Сколькими способами Дима может попасть в свою аудиторию, если он сейчас в классе А, урок проходит в классе Е, а дважды заходить в одну и ту же аудиторию Дима не хочет.



Решение: У Димы есть два варианта, куда пойти сначала: в Б или В. Так как это две разные группы, то из принципа сложения количество способов будет равно сумме количеству способов дойти из Б в Е и из В в Е. Найдем эти способы:

- Из вершины Б: Б→Д→Е и Б→В→Д→Е. Из правила умножения эти способы равны $2 \cdot 5$ и $2 \cdot 3 \cdot 5$, то есть 10 и 30. Значит из вершины Б добраться ровно 40 способов.

- Из вершины В: В→Д→Е и В→Б→Д→Е, то есть $3 \cdot 5 = 15$ и $2 \cdot 2 \cdot 5 = 20$, что в сумме даёт 35 способов.

Из вершины А 2 способа добраться до В, значит добраться из А до Е через вершину В ровно $2 \cdot 35$ способов, то есть 70. Через Б - $1 \cdot 40 = 40$. Значит из принципа сложения способов $70 + 40 = 110$.

Ответ: 110 способов.

8.4. На уроке русского языка ученики выучили 10 прилагательных, 20 существительных и 15 глаголов. Учитель предложил попробовать составить из них предложения. Предложение состоит из подряд стоящих слов: либо из существительного и глагола, либо из прилагательного, существительного и глагола. Сколько всего предложений они могут составить?

Решение: Сначала сосчитаем количество предложений, состоящих только из существительного и глагола. Существительное можно выбрать одним из 20 способов. Для каждого способа выбрать существительное есть по 15 способов выбрать глагол. Поэтому таких предложений будет $20 \cdot 15 = 300$. Теперь сосчитаем количество предложений, состоящих прилагательного, существительного и глагола. Прилагательное можно выбрать одним из 10 способов. Для каждого способа выбрать прилагательное есть по 20 способов выбрать существительное. Для каждого способа выбрать прилагательное и существительное есть по 15 способов выбрать глагол. Поэтому таких предложений будет $10 \cdot 20 \cdot 15 = 3000$. А всего возможных предложений будет $300 + 3000 = 3300$.

Примечание: Ввиду возможной неоднозначной трактовки условия правильным также считается решение задачи, в котором в первом и во втором случаях учитываются различные варианты порядка слов. В этом случае количество предложений, состоящих из существительного и глагола будет равно $20 \cdot 15 \cdot 2 = 600$, а из прилагательного, существительного и глагола - $10 \cdot 20 \cdot 15 \cdot 6 = 3000 \cdot 6 = 18000$. Тогда суммарное количество вариантов предложений будет равно $600 + 18000 = 18600$.

Ответ: 3300 (или 18600).

8.5. Сколько существует шестизначных чисел, у которых сумма цифр равна 3?

Решение: Сумма маленькая, поэтому удобно разобрать случаи по первой цифре.

- Случай 1: на первой позиции стоит “3”

  Тогда остальные цифры 0. Это верно только для одного числа, а именно числа 300000.

- Случай 2: на первой позиции стоит “2”

  Тогда сумма остальных пяти цифр равна 1, а это значит, что одна из позиций равна 1, в то время как остальные 0. То есть, необходимо выбрать для единицы одно место из пяти. Способов выбрать эту позицию ровно 5.

- Случай 3: на первой позиции стоит “1”

  Тогда сумма оставшихся пяти цифр равна 2. Возможны два подслучая:

  – Одна цифра 2, остальные 0

    Количество способов выбрать позицию для двойки, как и в “Случае 2” равно 5

  – Две цифры по 1, остальные 0

    Количество способов выбрать две позиции из пяти равно $5 \cdot 4 : 2 = 10$

Итого в этом случае: 5+10=15 вариантов.
Суммируем результаты по трём случаям: $1 + 5 + 15 = 21$.
Ответ: 21 число.

8.6. Найти количество десятизначных чисел таких, чтобы цифры в записи числа не повторялись.

Решение: Количество вариантов равно $9 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1$ (т.к. число не может начинаться с нуля).

Ответ: $9 \cdot 9!$.

8.7.

a) Найти количество вариантов выдать двум из шести школьников доклады на темы “Чётность” и “Отрицания”.

b) Найти количество вариантов выбрать, из тех-же шести школьников, двух для совместного проекта на тему “Принцип Дирихле”.

Решение:

a) Т.к. “Чётность” и “Отрицания” - различные темы, то по принципу умножения количество вариантов $6 \cdot 5 = 30$

b) Т.к. два школьника делают один общий проект, то выбрать учеников У1 и У2 можно двумя способами: сначала выбрав У2 и затем выбрав У1 или же сначала выбрав У1 и затем выбрав У2. Из-за чего количество вариантов будет в два раза меньше, чем в предыдущем пункте, а именно $6 \cdot 5 : 2 = 15$

Ответ: a) 30 b) 15.

8.8. Сколькими способами учитель может выложить перед учениками в ряд два белых, два черных и два серых шарика, если шарики одного цвета считаются одинаковыми?

Решение: Сначала предположим, что все шесть шариков различаются, тогда количество вариантов $6! = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. Теперь сотрём номера на двух чёрных шариках. Способов выложить шарики в ряд станет в два раза меньше: каждые два способа, отличающиеся только перестановкой чёрных шариков (Ч1 Ч2 и Ч2 Ч1), превратятся в один способ (Ч Ч). Аналогично с белыми и серыми. Итого $720 : 2 : 2 : 2 = 90$.

Ответ: 90.

8.9. Сколько существует вариантов выбрать из 6 игроков волейбольной команды трёх для взятия интервью?

Решение: Предположим, что позиции для допинг контроля разные: И1, И2, И3. Тогда количество вариантов выбрать их из шести равно $6 \cdot 5 \cdot 4 = 120$. Однако, эти позиции одинаковые и варианты И1И2И3, И1И3И2, И2И1И3, И2И3И1, И3И1И2 и И3И2И1 - суммарно 6 вариантов, дают нам один и тот-же набор игроков. Значит, количество вариантов при различных необходимо поделить на 6. Итого $120 : 6 = 20$.

Ответ: 20.

8.10. В классе 10 человек. Что больше, количество вариантов выбрать на вакцинацию 6 человек из класса или отправить на субботник 4 человека из класса?

Решение: Заметим, что выбрать 6 человек, идущих на вакцинацию - это всё равно, что выбрать 4 человек НЕ идущих на вакцинацию, что полностью совпадает со случаем про субботник.

Ответ: Одинаково.

8.11. В школьной футбольной команде 11 человек. Газета “Спорт-Экспресс” принципиально выбирает нечётное количество игроков для статьи про лучших, а газета “Наш спорт” - чётное. Докажите, что количество способов выбрать игроков для статей у них будет одинаково.

Решение: Рассмотрим варианты. Выделить 1 игрока из 11 - это всё равно, что выбрать 10, которые НЕ будут выделены. Это значит, что способов выбрать одного игрока из 11 ровно столько-же, сколько и выбрать 10 игроков из 11. Аналогично получаем пары 3 - 8, 5 - 6, 7 - 4, 9 - 2. Из этого видно, что сумма всех способов выбрать нечётное количество игроков равна сумме всех способов выбрать чётное количество.