7. Десятичная запись. Решения

7.0. Вася хвастается, что придумал математический фокус.

a) Он просит вас загадать число от 1 до 9, а потом умножить его на 11 и сказать только последнюю цифру. А в ответ он очень быстро назовет вам число, которое вы загадали. Сможете разгадать секрет фокуса? Сможете ли вы его повторить для кого-то другого?

b) Подумав, Вася решил, что фокус слишком простой и сказал, что теперь он будет поступать хитрее. Он предлагает вам загадать число от 1 до 9, умножить на 11, а потом на 21, а Вася в свою очередь услышав результат — очень быстро назовет вам загаданное число (Очевидно, что поделить с такой скоростью результат на 21, а потом на 11 он не успеет.) Сможете ли вы теперь показать этот фокус?

Решение:

a) Последняя цифра не меняется $11a = (10+1)a = 10a + a$.

b) Аналогично при умножении на 21 и 11: $21 \cdot 11a = (20+1)(10+1)a = 230a + a$.

7.1. Петя записал номер своего велосипедного замка, но забыл его. Помнит только: если к этому двузначному номеру прибавить сумму его цифр, получится число-перевёртыш (записанное теми же цифрами в обратном порядке). Помогите Пете вспомнить код.

Решение: a и b — первая и вторая цифры. a, b — натуральные от 1 до 9 (b также может быть нулём)

$$10a + b + a + b = 10b + a$$

$$10a = 8b$$

$$5a = 4b$$

подходят только 4 и 5.

Ответ: 45.

7.2. Каково четырехзначное число, в котором первая цифра — треть третьей, вторая — сумма первой и третьей, а четвертая — утроенная третья?

Решение: Третья цифра делится на три, (и не ноль, т.к. первая не ноль), значит по крайней мере 3. 4-ая — утроенная третья, значит по крайней мере 9, т.е. ровно 9, т.к. цифра не больше 10. Таким образом последняя цифра 9, третья 3, первая 1, а вторая 4.

Ответ: 1439.

7.3. Найдите все такие четырехзначные числа, две средние цифры которых образуют число, в 7 раз большее числа тысяч и в 2 раза большее числа единиц.

Решение: Две средние цифры образуют число, которое делится на 14. При этом, если разделить его на 2, получится однозначное число (так как оно записывается цифрой). Поэтому подойдет только 14 (28/2 это уже 14). Получаем число 2147.

Ответ: 2147.

7.4. Любые две соседние цифры числа образуют число, кратное 23. Какое наибольшее количество цифр может иметь это число?

Решение: Перечислим двузначные числа (и нолик), которые делятся на 23: 0, 23, 46, 69, 92. 0 ни с чем не соединяется, остальные соединяются только как $46 \to 69 \to 92 \to 23$. Это и дает пример.

Ответ: 5 цифр. 46923.

7.5. Сергей, выпускник малого мехмата, забыл пароль от своего компьютера. Он помнит, что пароль — семизначное число, первые три цифры которого одинаковы, и последние четыре цифры тоже одинаковы. Сумма всех цифр пароля — двузначное число, первая цифра которого совпадает с первой цифрой пароля, а последняя — с последней. Помогите Сергею вспомнить пароль.

Решение: Так как первые три цифры пароля одинаковы, как и последние четыре, то обозначим этот пароль через — $\overline{xxxyyyy}$. Сумма цифр этого числа $3x+4y$, и по условию это же равно — $\overline{xy}$. Значит, имеем равенство $3x+4y=10x+y \iff 7x=3y$. y делится на 7, значит цифра y равна 0 или 7. Если $y=0$, то x тоже равен 0, но тогда число $\overline{xy}$ не двузначное. Если $y=7$, то $x=3$ и пароль 3337777 подходит.

Ответ: 3337777.

7.6. Решите ребус: здесь разными буквами обозначены разные цифры, а одинаковыми — одинаковые.

$$\begin{array}{r} \mathrm{A\,B\,C} \\ +\quad \mathrm{A\,C} \\ \mathrm{A} \\ \hline \mathrm{B\,C\,C} \end{array}$$

Решение: B и A разные цифры, поэтому их сумма не больше $9+8=17$. К ним через десяток может перейти не больше 2 (из последнего столбца). Значит к A через десяток перешел 0 или 1, но так как цифры A и B различны, из первого столбца получаем $B=A+1$. Далее $C+C+A$ оканчивается на C, значит $A+C$ оканчивается на 0, то есть $C=10-A$ так как $A+C<20$. Теперь воспользуемся тем, что во второй стоблец перешел десяток, и что из него перешел десяток. $B+A+1=10+C$. Подставим сюда выражения B и C. $A+1+A+1=10+10-A \iff 3A=18 \iff A=6$. Тогда $B=7$, $C=4$.

7.7. Из пятизначного числа вычли такое же, но записанное в обратном порядке. Докажите, что получившееся число делится на 11.

Решение: Обозначим пятизначное число через $\overline{abcde}=10000a+1000b+100c+10d+e$. Тогда число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке, равно $\overline{edcba}=10000e+1000d+100c+10b+a$. Разность этих чисел равна $\overline{abcde}-\overline{edcba}=9999(a-e)+990(b-d)$. Так как оба числа 9999 и 990 делятся на 11, то и вся сумма делится на 11, что и требовалось.

7.8. Матвей забыл номер своей аудитории, но запомнил, что если приписать к ее номеру 7 и сложить с исходным номером, то получится 4671. Помогите ему вспомнить номер своей аудитории.

Решение: Приписать справа к числу n цифру 7 — то же самое, что умножить число n на 10 и прибавить к результату 7. Поэтому число, которое запомнил Матвей, равно $10n+7$. По условию, если его сложить с исходным, то есть с n, получится 4671. Тогда мы можем составить уравнение:

$$10n+7+n=4671$$

$$11n=4664$$

$$n=424$$

Итак, $n=424$, и именно его нам и нужно было найти.

Ответ: 424.

7.9. Когда число КАСКА умножили на 99999, то получили число, оканчивающееся на 285. Какое число обозначено словом КАСКА?

Решение: Заметим, что $99999=100000-1$. Тогда: КАСКА$\times$99999 =КАСКА $\times(100000-1)$ =КАСКА $\times$100000$-$КАСКА. Таким образом, мы из числа, оканчивающегося на 5 нулей, вычитаем число и получаем число, оканчивающееся на 285. Это возможно только если КАСКА= $\ldots 715$, потому что: $1000-715=285(1000-285=715)$. Тогда С= 7, К= 1 и А= 5 значит КАСКА= 15715.

Ответ: 15715.

7.10. Число 2999 умножают на число, состоящее из 100 единиц. Найдите сумму цифр полученного произведения.

Решение: Пусть $N=111...1$ (100 единиц). Нам нужно найти $2999\cdot N$. Заметим, что $2999=3000-1$. Тогда: $2999\cdot N=(3000-1)\cdot N=3000\cdot N-N$. $3000\cdot N=333...3000$ (100 троек и три нуля). Теперь вычтем N из этого числа:

Более наглядно можно увидеть закономерность:

$2999\cdot 11=32989$.

$2999\cdot 111=332889$.

$2999 \cdot 1111 = 3331889$.
$2999 \cdot 11111 = 33321889$.
$2999 \cdot 111111 = 333221889$.
$2999 \cdot 1111111 = 3332221889$.
Вычитая N столбиком получаем: $2999 \cdot (111\ldots1)$ (100 единиц) $= 333222\ldots2$ (96 двоек) 889.
Общая сумма: $3 \cdot 3 + 2 \cdot 96 + 8 \cdot 2 + 9 = 226$
Ответ: 226.