Принцип Дирихле. Решения

6.0. Кролики сидят в клетках. Докажите, что если кроликов больше, чем клеток, то найдётся клетка, где больше одного кролика.

Решение: Будем доказывать от противного. Для этого предположим, что утверждение неверно. Это значит, что верно его отрицание: в каждой клетке не больше одного кролика. Теперь сосчитаем кроликов: в каждой клетке не больше одного, значит всего их не больше, чем клеток. Получается, одновременно кроликов и больше клеток, и не больше. Противоречие, значит наше предположение ошибочно, и верно его отрицание, то есть найдётся клетка, где больше одного кролика.

6.1. Докажите, что в этой аудитории найдутся хотя бы два человека, родившихся в один месяц

Решение: Будем считать, что в аудитории есть хотя бы 13 человек. Предположим, что верно противное: в аудитории нет двух человек, родившихся в один месяц. Тогда в каждом месяце родилось не более одного человека, и в аудитории не больше 12 человек. $13 > 12$, противоречие, наше предположение неверно, верно утверждение из условия.

6.2. Какое наибольшее число ладей можно расставить на шахматной доске так, чтобы они не били друг друга?

Решение: Ладья бьёт все клетки по вертикали и горизонтали. Всего на доске 8 горизонталей. Если мы поставим на доску больше 8 ладей, то хотя бы на одной горизонтали их окажется хотя бы две, и они будут бить друг друга. Осталось лишь заметить, что ровно 8 ладей, не бьющих друг друга, можно разместить на главной диагонали.

6.3. Трое в лодке (не считая собаки) едят голубику. Всего у них было 25 ягод. Докажите, что найдётся едок, съевший не меньше 9 ягод.

Решение: Предположим, такого едока не нашлось. Тогда каждый съел не более 8 ягод, а все вместе – не более 24 ягод. $25 > 24$, противоречие.

6.4. Вождь краснокожих каждую минуту называет бандитам сумму выкупа, который они будут вынуждены заплатить за него, увеличивая её каждый раз на единицу. Докажите, что среди последних семи названных чисел найдутся два, разность которых делится на 6.

Решение: Вспомогательный факт: если у a и b совпадают остатки от деления на d, то $a - b$ делится на d.

Теперь заметим, что различных остатков от деления на 6 всего 6, из чего следует, что среди семи чисел хотя бы у двух остатки совпадут.

6.5. Вася, Коля и Петя загадали по 4 двузначных числа, но не сказали их Маше. Маша сказала, что среди них обязательно есть два, разность которых записывается одинаковыми цифрами. Права ли Маша?

Решение: Если разность двузначных чисел записывается одинаковыми цифрами, то это двузначное число, и оно делится на 11. Если все числа различны, то верно и обратное: если разность делится на 11, то это двузначное число, записывающееся одинаковыми цифрами. Чисел 12, остатков от деления на 11 11, следовательно найдутся два числа, разность которых делится на 11.

6.6. Легенда гласит, что познавший глубинную суть математики сможет рассечь треугольник одной прямой так, что пересечёт все три стороны, но не зацепит ни единой вершины. Докажите, что это невозможно.

Решение: Предположим, провести такую прямую получилось. Тогда возьмём произвольную вершину треугольника и покрасим плоскость с этой стороны от прямой в красный, а противоположную сторону от прямой – в синий. Вершины треугольника, таким образом, окрашены в разные цвета, причём концы каждой стороны разноцветные. Так как вершин 3, а цветов только 2, найдутся две вершины одного цвета, и между ними проходит сторона. Противоречие.

6.7. В легенде о шахматной доске изобретатель шахмат попросил в награду зерно за первую клетку, два зерна за вторую, четыре за третью, и за каждую следующую клетку вдвое больше зёрен, чем за предыдущую. Не будем ограничивать себя шахматной доской и представим всю последовательность таких чисел. Докажите, что среди любых 2025 из них найдутся два, разность которых делится на 2024.

Решение: Воспользуемся вспомогательным фактом из задачи 4. Различных остатков от деления на 2024 меньше 2025, значит среди 2025 чисел найдутся два с одинаковыми остатками (а, значит, их разность будет делиться на 2024).

6.8. Кузьма Скоробогатый ведёт счёт деньгам и каждый день записывает, сколько заработал. Докажите, что из 2025 дней получится выбрать один или несколько, что его доход за них в сумме будет делиться на 2025.

Решение: Будем считать деньги Кузьмы, заработанные за эти дни. Если за первый день он заработал нужную сумму, мы нашли нужный день. Если за первые два дня он заработал нужную сумму, мы нашли нужный день. Получим таким образом 2025 сумм, каждая из которых не делится на 2025, причём разность любых двух из них – это сумма, заработанная Кузьмой за несколько подряд идущих дней. Так как ни одна из сумм не делится на 2025, то ни одна не даёт остаток 0 при делении на 2025. Кроме нуля существует ещё 2024 остатка, то есть среди 2025 чисел найдутся хотя бы два числа с одинаковыми остатками. Их разность поделится на 2025.

6.9. В городе Квадратном разбили треугольную клумбу со сторонами по 3 метра, на которую торжественно высадили 10 роз. Докажите, что найдутся две розы, расстояние между которыми не больше метра.

Решение: Разделим клумбу на 9 треугольников со стороной по одному метру. В одном из этих треугольников есть хотя бы две розы, и расстояние между ними не больше метра.

6.10. Главную площадь города Квадратного раскрасили в красный и синий неизвестные художники-авангардисты. Докажите, что на площади найдутся две точки одинакового цвета, расстояние между которыми будет в точности равно эталону метра из палаты мер и весов города Квадратного.

Решение: Вообразим на площади треугольник со сторонами, равными эталону метра. Каждая вершина окрашена в какой-то из двух цветов, значит найдутся две вершины одного цвета, расстояние между которыми (по построению) и будет равно эталону метра.

6.11. Наташа любит конфеты, а её кошка — пакеты. У них есть 2025 конфет и 100 пакетов, куда их нужно разложить. После долгих часов труда получилось, что в каждом пакете есть конфеты, и нет пакетов с одинаковым количеством конфет (если пакет попал внутрь другого, то мы считаем, что все его конфеты лежат и во внешнем). Докажите, что в каком-то пакете лежит пакет с пакетом внутри.

Решение: Каждая конфета лежит в каком-то количестве пакетов. Возьмём для каждой конфеты количество пакетов, в которых она лежит, и сложим их. Если утверждение из условия ошибочно, то каждая конфета лежит не более чем в 2 пакетах. Значит, сумма не превосходит $2 \cdot 2025 = 4050$

С другой стороны, эта сумма в точности равна сумме количеств конфет в каждом пакете. Так как пустых и с одинаковым количеством конфет нет, то она не меньше $1+2+\ldots+100 = 5050$. Противоречие, следовательно хотя бы одна конфета лежит не менее чем в трёх пакетах, что и означает, что в пакете есть пакет с пакетом внутри.