18. Графы. Решения

18.0. В государстве есть 9 островов, пронумерованных цифрами от 1 до 9. Между двумя островами есть прямое морское сообщение тогда и только тогда, когда двузначное число, составленное из номеров этих островов, делится на 3. Можно ли добраться с острова 1 на остров 9?

Решение: на построенном графе вершины 1 и 9 находятся в разных компонентах связности (вершины 3, 6, 9 образуют отдельную компоненту).

Ответ: нельзя.

18.1. Иван, Пётр и Сергей рассказали о стране, разделённой на области. Каждая область граничит с несколькими другими. Иван сказал, что в стране 11 областей, и каждая граничит ровно с 3 другими. Пётр сказал, что в стране 12 областей: у 10 областей по 5 соседей, а у 2 — по 12 соседей. Сергей сказал, что в стране 10 областей: у 2 областей по 9 соседей, у 6 — по 4, и ещё у 2 — по одному соседу. Кто из них мог сказать правду?

Решение: Иван неправ, т.к. сумма степеней графа равна 33, т.е. нечетному числу, что противоречит лемме о рукопожатиях. Петр неправ, т.к. если всего 12 вершин, то степень каждой не больше 11. Это противоречит тому, что есть две вершины степени 12. Сергей неправ, т.к. по его словам есть 2 вершины степени 9, то есть такие, которые соединены со всеми остальными. Но тогда каждая другая вершина имеет степень не менее 2. Это противоречит тому, что есть вершины степени 1.

Ответ: все неправы.

18.2. Можно ли построить граф с 8 вершинами, у которого степени вершин равны: а) 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6; б) 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 8; в) 2, 2, 4, 4, 5, 7, 7, 7; г) 0, 0, 1, 2, 2, 5, 5, 5; д) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4; е) 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 8; ж) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; з) 1, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 7; и) 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 6 ?

Решение: а) Нет, сумма степеней вершин нечётная. б) Нет, степень вершины не может быть больше 7. в) Нет, три вершины соединены со всеми, значит, у каждой вершины графа степень минимум 3, а в условии есть две вершины степени 2. г) Нет, уберём из рассмотрения две вершины степени 0, тогда получим граф на шести вершинах, три из которых имеют степень 5, значит, они соединены со всеми, и не может быть вершины степени 1. д) Да, есть пример. е) Нет, степень вершины не может быть больше 7. ж) Нет, в графе не могут одновременно существовать вершина, соединенная со всеми другими и вершина, не соединенная ни с какой другой. з) Нет, две вершины соединены со всеми вершинами графа, значит, у каждой вершины степень минимум 2, а по условию есть вершина степени 1. и) Нет, сумма степеней вершин нечётная.

18.3. На одно занятие в Большом зале собрались 24 ученика, среди них был и Гарри Поттер. Профессор решил проверить, кто с кем дружит, и задал вопрос каждому ученику, кроме Гарри: «Сколько у тебя друзей среди присутствующих?» Каждый назвал либо число 3, либо число 5. Докажите, что у Гарри Поттера среди собравшихся есть хотя бы один друг.

Решение: Переведём задачу на язык графов: вершины — ученики, рёбра — знакомства. Пусть Гарри ни с кем не знаком, тогда в графе 23 вершины, степень каждой из которых 3 или 5, и одна вершина степени 0. Сумма степеней вершин этого графа нечётная, что противоречит лемме о рукопожатиях.

18.4. Возможно ли нарисовать 9 отрезков на плоскости таким образом, чтобы каждый пересекал ровно 3 других (считается, что в одной точке могут пересекаться не более двух отрезков)? Если это возможно, сколько точек пересечения получится?

Решение: Сопоставим задаче граф, где вершины - отрезки, а ребра - при наличии точки пересечения. Получим граф на 9 вершинах, степень каждой равна 3. Тогда суммы степеней вершин нечетна - противоречие с леммой о рукопожатиях.

Ответ: невозможно.

18.5. В волшебном царстве есть 33 города. Известно, что из каждого города выходит не менее 16 дорог, ведущих в разные другие города. Докажите, что из любого города этого царства можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через промежуточные города).

Решение: Граф с 33 вершинами, степень каждой не меньше 16. От противного решаем. Пусть есть две несвязные вершины. Рассмотрим две их компоненты связности - в каждой хотя бы 17 вершин, тогда во всем графе уже как минимум 34 вершины - противоречие.

18.6. В галактике расположено несколько космических станций, соединённых гиперпространственными маршрутами. По каждому маршруту можно летать в обе стороны. Из главной станции вылетает 21 маршрут, с далёкой станции под названием «Далекий пост» — только один, а с каждой из остальных станций — ровно по 20 маршрутов. Докажите, что с главной станции можно добраться до «Далекого поста» (возможно, делая пересадки на других станциях).

Решение: Рассмотрим компоненту связности графа космических станций, содержащую главную станцию. Нужно доказать, что она содержит и станцию «Далекий пост». Докажем от противного. Пусть в компоненте связности станции «Далекий пост» нет. Тогда в ней из одной вершины (главной станции) выходит 21 ребро, а из всех остальных вершин — по 20 рёбер. Таким образом, в этом графе ровно одна нечётная вершина, что противоречит теореме о количестве нечётных вершин графа.

18.7. В вымышленном мире существует сеть городов, соединённых дорогами. Из каждого города выходит ровно 2026 дорог, и известно, что с их помощью можно попасть из любого города в любой другой (возможно, проезжая через другие города). Одну дорогу перекрыли. Докажите, что даже после этого существует маршрут между любыми двумя городами.

Решение: Предположим, что после закрытия дороги нельзя добраться из любого города в любой. Значит, граф распался на две компоненты связности (две отдельные части). При этом в каком-то городе первой части стало теперь 2026 - 1 = 2025 . А всего будет какое-то количество городов умноженное на 2026 дорог и плюс 2025. И это количество должно делиться на 2 - потому что это посчитаны концы. Но получили нечетное число. Поэтому это невозможная ситуация. Поэтому предположение неверно, значит, после удаления какой-то дороги можно опять добраться в любой другой из любого города.

18.8. В стране 2021 город. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно оставить одну из этих авиакомпаний так, что из любого города можно будет попасть в любой другой рейсами этой авиакомпании.

Решение: Рассмотрим граф на 2021 вершине, где каждое ребро окрашено в один из двух цветов. Предположим, что граф первого цвета несвязен. Тогда его вершины разбиваются на две непустые части A и B, между которыми нет рёбер первого цвета. Но между любыми двумя вершинами ребро есть, значит все рёбра между A и B имеют второй цвет. Тогда любые две вершины соединяются в графе второго цвета: если они в разных частях, то ребром; если в одной, то через любую вершину другой части. Следовательно, граф второго цвета связен. Значит, если граф одной авиакомпании несвязен, то граф другой связен. Следовательно, хотя бы одна авиакомпания даёт связную сеть.

18.9. В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов — по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.

Решение: Докажем, что ситуация, когда у каждого города (кроме И) все три дороги разного цвета - невозможна. Из этого будет следовать требуемое утверждение. От противного. Пусть у каждого города (кроме И) все дороги разного цвета. Тогда сумма (по всем вершинам) их степеней, вычисленных только по желтым ребрам - четна (лемма о рукопожатиях). Аналогично, суммы по красным и по зеленым тоже четны. Пусть n - число городов. По предположению из этих трех сумм две равны n-1, а одна равна n (за счет дороги из И). Получаем, что n и n-1 четны - противоречие.

18.10. Есть два государства: Реальное и Вымышленное. У каждого города в Реальном есть «двойник» в Вымышленном, и наоборот. Если в Реальном государстве между двумя городами есть прямая железная дорога, то в Вымышленном между соответствующими городами её нет. И наоборот — если в Реальном государстве два города не соединены напрямую, то в Вымышленном между ними обязательно проложена железная дорога. Известно, что в Реальном государстве девочка Алиса не может добраться из одного города в другой, совершив менее двух пересадок. Докажите, что в Вымышленном государстве Алиса сможет доехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

Решение: Из условия следует, что города A и B в Реальном государстве не соединены дорогой и что любой другой город в Реальном государстве не соединён либо с A, либо с B. Значит, двойники A' и B' городов A и B в Вымышленном соединены дорогой, а каждый другой город Вымышленного соединён либо с A', либо с B'. Следовательно, в Вымышленном из каждого города можно доехать до одного из городов A' и B', затем при необходимости доехать до второго из них, а после доехать до любого другого города Вымышленного. При этом требуется не более двух пересадок.

18.11. У каждого из 9 партнеров Миши по шахматному клубу разное количество друзей в этом клубе. Сколько может быть друзей у Миши? Укажите все возможные ответы.

Решение: Переведём задачу на язык графов: вершины — Миша и его партнеры по клубу, рёбра — дружбы. В графе 10 вершин, у 9-ти из них разные степени, возможные варианты которых: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. Вершины степеней 0 и 9 не могут одновременно существовать в графе. Поэтому у вершин степени либо 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, либо 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9. В каждом из случаев однозначно восстанавливается степень вершины-Миши: 4 или 5.

Ответ: 4 или 5.