

## 18. Графы

**Лемма о рукопожатиях.** Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству его ребер.  
**Компонента связности.** Компонентой связности графа называется подграф, в котором из любой вершины существует путь в любую другую вершину этого подграфа, но не существует путей в вершины графа, не принадлежащие этому подграфу.

**18.0.** В государстве есть 9 островов, пронумерованных цифрами от 1 до 9. Между двумя островами есть прямое морское сообщение тогда и только тогда, когда двузначное число, составленное из номеров этих островов, делится на 3. Можно ли добраться с острова 1 на остров 9?

**18.1.** Иван, Пётр и Сергей рассказали о стране, разделённой на области. Каждая область граничит с несколькими другими. Иван сказал, что в стране 11 областей, и каждая граничит ровно с 3 другими. Пётр сказал, что в стране 12 областей: у 10 областей по 5 соседей, а у 2 — по 12 соседей. Сергей сказал, что в стране 10 областей: у 2 областей по 9 соседей, у 6 — по 4, и ещё у 2 — по одному соседу. Кто из них мог сказать правду?

**18.2.** Можно ли построить граф с 8 вершинами, у которого степени вершин равны: а) 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6; б) 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 8; в) 2, 2, 4, 4, 5, 7, 7, 7; г) 0, 0, 1, 2, 2, 5, 5, 5; д) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4; е) 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 8; ж) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; з) 1, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 7; и) 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 6?

**18.3.** На одно занятие в Большом зале собрались 24 ученика, среди них был и Гарри Поттер. Профессор решил проверить, кто с кем дружит, и задал вопрос каждому ученику, кроме Гарри: «Сколько у тебя друзей среди присутствующих?» Каждый назвал либо число 3, либо число 5. Докажите, что у Гарри Поттера среди собравшихся есть хотя бы один друг.

**18.4.** Возможно ли нарисовать 9 отрезков на плоскости таким образом, чтобы каждый пересекал ровно 3 других (считается, что в одной точке могут пересекаться не более двух отрезков)? Если это возможно, сколько точек пересечения получится?

**18.5.** В волшебном царстве есть 33 города. Известно, что из каждого города выходит не менее 16 дорог, ведущих в разные другие города. Докажите, что из любого города этого царства можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через промежуточные города).

**18.6.** В галактике расположено несколько космических станций, соединённых гиперпространственными маршрутами. По каждому маршруту можно летать в обе стороны. Из главной станции вылетает 21 маршрут, с далёкой станции под названием «Далёкий пост» — только один, а с каждой из остальных станций — ровно по 20 маршрутов. Докажите, что с главной станции можно добраться до «Далекого поста» (возможно, делая пересадки на других станциях).

**18.7.** В вымышленном мире существует сеть городов, соединённых дорогами. Из каждого города выходит ровно 2026 дорог, и известно, что с их помощью можно попасть из любого города в любой другой (возможно, проезжая через другие города). Одну дорогу перекрыли. Докажите, что даже после этого существует маршрут между любыми двумя городами.

**18.8.** В стране 2021 город. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно оставить одну из этих авиакомпаний так, что из любого города можно будет попасть в любой другой рейсами этой авиакомпании.

**18.9.** В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов — по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.

**18.10.** Есть два государства: Реальное и Вымышленное. У каждого города в Реальном есть «двойник» в Вымышленном, и наоборот. Если в Реальном государстве между двумя городами есть прямая железная дорога, то в Вымышленном между соответствующими городами её нет. И наоборот — если в Реальном государстве два города не соединены напрямую, то в Вымышленном между ними обязательно проложена железная дорога. Известно, что в Реальном государстве девочка Алиса не может добраться из одного города в другой, совершив менее двух пересадок. Докажите, что в Вымышленном государстве Алиса сможет доехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

**18.11.** У каждого из 9 партнеров Миши по шахматному клубу разное количество друзей в этом клубе. Сколько может быть друзей у Миши? Укажите все возможные ответы.

## 18. Графы

**Лемма о рукопожатиях.** Сумма степеней вершин графа равна удвоенному количеству его ребер.  
**Компонента связности.** Компонентой связности графа называется подграф, в котором из любой вершины существует путь в любую другую вершину этого подграфа, но не существует путей в вершины графа, не принадлежащие этому подграфу.

**18.0.** В государстве есть 9 островов, пронумерованных цифрами от 1 до 9. Между двумя островами есть прямое морское сообщение тогда и только тогда, когда двузначное число, составленное из номеров этих островов, делится на 3. Можно ли добраться с острова 1 на остров 9?

**18.1.** Иван, Пётр и Сергей рассказали о стране, разделённой на области. Каждая область граничит с несколькими другими. Иван сказал, что в стране 11 областей, и каждая граничит ровно с 3 другими. Пётр сказал, что в стране 12 областей: у 10 областей по 5 соседей, а у 2 — по 12 соседей. Сергей сказал, что в стране 10 областей: у 2 областей по 9 соседей, у 6 — по 4, и ещё у 2 — по одному соседу. Кто из них мог сказать правду?

**18.2.** Можно ли построить граф с 8 вершинами, у которого степени вершин равны: а) 2, 3, 3, 4, 4, 4, 5, 6; б) 2, 3, 3, 4, 4, 6, 6, 8; в) 2, 2, 4, 4, 5, 7, 7, 7; г) 0, 0, 1, 2, 2, 5, 5, 5; д) 1, 1, 2, 2, 3, 3, 4, 4; е) 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 8; ж) 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; з) 1, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 7; и) 2, 2, 3, 5, 5, 6, 6, 6?

**18.3.** На одно занятие в Большом зале собрались 24 ученика, среди них был и Гарри Поттер. Профессор решил проверить, кто с кем дружит, и задал вопрос каждому ученику, кроме Гарри: «Сколько у тебя друзей среди присутствующих?» Каждый назвал либо число 3, либо число 5. Докажите, что у Гарри Поттера среди собравшихся есть хотя бы один друг.

**18.4.** Возможно ли нарисовать 9 отрезков на плоскости таким образом, чтобы каждый пересекал ровно 3 других (считается, что в одной точке могут пересекаться не более двух отрезков)? Если это возможно, сколько точек пересечения получится?

**18.5.** В волшебном царстве есть 33 города. Известно, что из каждого города выходит не менее 16 дорог, ведущих в разные другие города. Докажите, что из любого города этого царства можно добраться до любого другого (возможно, проезжая через промежуточные города).

**18.6.** В галактике расположено несколько космических станций, соединённых гиперпространственными маршрутами. По каждому маршруту можно летать в обе стороны. Из главной станции вылетает 21 маршрут, с далёкой станции под названием «Далёкий пост» — только один, а с каждой из остальных станций — ровно по 20 маршрутов. Докажите, что с главной станции можно добраться до «Далекого поста» (возможно, делая пересадки на других станциях).

**18.7.** В вымышленном мире существует сеть городов, соединённых дорогами. Из каждого города выходит ровно 2026 дорог, и известно, что с их помощью можно попасть из любого города в любой другой (возможно, проезжая через другие города). Одну дорогу перекрыли. Докажите, что даже после этого существует маршрут между любыми двумя городами.

**18.8.** В стране 2021 город. Между каждыми двумя городами установлено воздушное сообщение одной из двух авиакомпаний. Докажите, что можно оставить одну из этих авиакомпаний так, что из любого города можно будет попасть в любой другой рейсами этой авиакомпании.

**18.9.** В стране Оз есть много городов, некоторые из которых соединены дорогами. Каждая из дорог вымощена либо жёлтым кирпичом, либо красным, либо зелёным. Известно, что из Изумрудного города выходит ровно одна дорога, а из всех остальных городов — по три дороги. Докажите, что в стране Оз есть город, из которого выходят две дороги одного цвета.

**18.10.** Есть два государства: Реальное и Вымышленное. У каждого города в Реальном есть «двойник» в Вымышленном, и наоборот. Если в Реальном государстве между двумя городами есть прямая железная дорога, то в Вымышленном между соответствующими городами её нет. И наоборот — если в Реальном государстве два города не соединены напрямую, то в Вымышленном между ними обязательно проложена железная дорога. Известно, что в Реальном государстве девочка Алиса не может добраться из одного города в другой, совершив менее двух пересадок. Докажите, что в Вымышленном государстве Алиса сможет доехать из любого города в любой другой, сделав не более двух пересадок.

**18.11.** У каждого из 9 партнеров Миши по шахматному клубу разное количество друзей в этом клубе. Сколько может быть друзей у Миши? Укажите все возможные ответы.