17. Теория Игр 2. Решения

17.0. На островной карте 8×8 кораблик стоит в левом нижнем углу маршрута. За один ход разрешается передвинуть кораблик на любое число клеток либо вправо, либо вверх. Выигрывает тот, кто поставит кораблик в правый верхний угол маршрута. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Опишем выигрышную стратегию второго игрока. Первым ходом первый игрок неизбежно уводит кораблик с главной диагонали маршрута, соединяющей левый нижний и правый верхний углы. После этого второй игрок своим ходом может вернуть кораблик на эту диагональ. Получается позиция того же типа, что и в начале, только теперь кораблик уже ближе к финишу. Если второй игрок будет каждый раз возвращать кораблик на диагональ, то именно он первым поставит его в правый верхний угол.

Ответ: второй игрок.

17.1. На большой карте Галактической федерации размером 2026×1000 в левом нижнем углу стоит корабль. Лило и Стич по очереди передвигают его на любое количество клеток либо вправо, либо вверх. Первой ходит Лило. Выигрывает тот, кто поставит корабль в правый верхний угол карты. Кто выигрывает при правильной игре?

Решение: Выигрывает первый игрок. Сначала Лило делает ход так, чтобы корабль попал на диагональ квадрата 1000×1000, расположенного в правой верхней части доски: для этого она сдвигает его вправо на 1026 клеток. После этого корабль оказывается в позиции, аналогичной обычной задаче про квадратную доску 1000×1000. Дальше Лило после каждого хода соперника возвращает корабль на диагональ этого квадрата. Поэтому именно она сумеет первой довести корабль до правого верхнего угла.

Ответ: первый игрок (Лило).

17.2. Стич нашёл кучку из 25 гавайских кокосов. Лило и Стич по очереди забирают из кучки 2, 4 или 7 кокосов (не больше, чем есть). Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Первой ходит Лило. Кто выиграет при правильной игре?

Решение: С конца размечаем позиции, 25 — В. Отправляем противника в проигрышные. Например так: Наш первый ход $25 - 7 = 18$. Если соперник своим первым -2 или -7, дополняем до -9, итого соперник в 9. Теперь либо ещё раз дополняем его ход до 9, если он опять -2 или -7, либо он -4, и мы -4, итого он в 1 и проиграл. Если соперник своим первым -4, то мы - 2, итого соперник в 12. Если он -7, мы -4, итого он в 1. В противном случае дополняем ход до 6, итого он в 6, и там опять дополняем ход до 6.

Ответ: первый игрок (Лило).

17.3. Игра Лило и Стича начинается с числа 4. За ход можно прибавить к имеющемуся числу любое натуральное число, меньшее этого числа. Выигрывает тот, кто первым получит число 1000. Кто выигрывает при правильной игре, если первой ходит Лило?

Решение: Разметим позиции с конца. Число 1000 — проигрышная для того, кто должен ходить из него, позиция. Тогда 999, 998, ..., 501 — выигрышные, потому что из них можно попасть в 1000. Значит, 500 — проигрышная позиция. Далее аналогично получаем, что 250 тоже проигрышная, затем 125, 62, 31, 15, 7. Таким образом, число 4 является выигрышной позицией для первого игрока. Ему нужно всё время переводить соперника в одну из проигрышных позиций: 7, 15, 31, 62, 125, 250, 500, 1000.

Ответ: первый игрок (Лило).

17.4. На островной карте 8×8 кораблик стоит в левом нижнем углу маршрута. Лило и Стич по очереди передвигают либо на одну клетку вправо, либо на одну клетку вверх, либо на одну клетку по диагонали вправо-вверх. Выигрывает тот, кто поставит кораблик в правый верхний угол маршрута. Кто выигрывает при правильной игре, если первой ходит Лило?

Решение: Выигрывает первый игрок. Сначала он идёт по диагонали. После этого он может повторять в точности ходы соперника: если соперник идёт вправо, то он идёт вправо, а если соперник идёт вверх, то он идёт вверх. Если соперник идёт по диагонали, он тоже идёт по диагонали. Так первый игрок всё время сохраняет четность по горизонтали и по вертикали для своей позиции, а значит в итоге первым приходит в правый верхний угол (имеющий координаты (8,8)).

Ответ: первый игрок (Лило).

17.5. На клетчатом поле 8×8 в клетке в левом нижнем углу стоит прыгающий эксперимент из мира «Лило и Стич». За ход он может прыгнуть либо на две клетки вправо и на одну вверх или вниз, либо на две клетки вверх и на одну вправо или влево — то есть ходит как шахматный конь, ну “почти”. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, если первой ходит Лило?

Решение:

в	в	п	п	в	в	п	п
в	в	п	п	в	в	п	п
в	в	в	в	в	в	в	в
в	в	в	в	в	в	в	в
в	в	п	п	в	в	п	п
в	в	п	п	в	в	п	п
в	в	в	в	в	в	в	в
п	в	в	в	в	в	в	в

Распишем выигрышные и проигрышные позиции, получим, что первый игрок находится в проигрышной, а значит второй может гарантировать себе победу

Ответ: второй игрок (Стич).

17.6. У Лило и Стича есть 7 жетонов с цифрами от 0 до 6. Они по очереди берут по одному жетону. Выигрывает тот, кто впервые сможет из своих жетонов составить натуральное число, делящееся на 17. Кто выиграет при правильной игре, если Лило ходит первой?

Решение: Пусть первым ходом Лило возьмёт цифру 3. Тогда Стич вынужден взять цифру 4, потому что иначе Лило на втором ходу сама возьмёт 4 и сразу составит число 34, делящееся на 17. Заметим, что после этого Стич своим вторым ходом выиграть не сможет: единственное двузначное число, содержащее цифру 4 и делящееся на 17, — это 34, а цифра 3 уже у Лило. Теперь Лило берёт цифру 1. После этого она угрожает следующим ходом составить либо число 51, либо число 136. Как уже отмечено, Стич немедленно выиграть не может. При этом одновременно защититься от обеих угроз он тоже не может. Значит, следующим ходом Лило гарантированно выигрывает.

Ответ: первый игрок (Лило).

17.7. У Лило и Стича есть две тарелки с гавайскими сладостями: на одной 20 штук, на другой 21. За ход нужно полностью съесть одну тарелку, а сладости с другой тарелки разделить на две новые тарелки, не обязательно поровну. Проигрывает тот, кто не может сделать ход. Кто выигрывает при правильной игре, если первой ходит Лило?

Решение: Выигрывает первый игрок. Проигрышными являются позиции, в которых обе тарелки содержат нечётное число сладостей. Своим первым ходом первый игрок съедает тарелку с 21 сладостью, а 20 сладостей со второй тарелки делит на две тарелки, в каждой из которых нечётное число сладостей. После этого соперник получает проигрышную позицию.

Ответ: первый игрок (Лило).

17.8. Лило и Стич играют в такую игру: они по очереди закрашивают клетки квадратной доски 4×4, как будто раскрашивают плитку для нового пляжного домика. Первой ходит Лило, затем Стич. Игра продолжается, пока не окажется полностью закрашенным какой-нибудь квадрат 2×2. Тот, кто закрасил последнюю клетку в таком квадрате 2×2, проигрывает. Кто может выиграть независимо от игры соперника?

Решение:

A	B	C	D
G	E	F	H
A	B	C	D
G	E	F	H

Обозначим клетки одинаковыми буквами так, как показано на рисунке

Стратегия Стича будет такой: после каждого хода Лило он закрашивает клетку с той же буквой. Например, если Лило закрасила клетку с буквой A, то Стич тоже закрашивает другую клетку с буквой A. Почему эта стратегия выигрышная? Если бы Стич своим ходом завершил какой-то квадрат 2×2, то это означало бы, что перед его ходом в этом квадрате уже были закрашены три клетки. Но тогда последнюю из них перед этим закрасила Лило, то есть именно она уже проиграла бы раньше. Значит, Стич сам не окажется проигравшим, а Лило рано или поздно проиграет.

Ответ: второй игрок (Стич).

17.9. Лило и Стич записали на доске номера всех космических экспериментов: $1, 2, 3, \ldots, 1000$. Они по очереди стирают по одному числу. Игра заканчивается, когда на доске остаются только два числа. Если сумма этих двух чисел делится на 3, то побеждает тот, кто ходил первым; иначе побеждает второй. Кто выигрывает при правильной игре, если первой ходит Лило?

Решение: Всего будет сделано 998 ходов. Среди чисел от 1 до 1000 ровно 333 числа делятся на 3. Второй игрок может гарантировать, что все такие числа будут стёрты раньше, чем останутся последние два числа. После этого среди оставшихся чисел будут только числа с остатками 1 или 2 при делении на 3. В последний момент останется три числа, из которых второму нужно будет стереть одно. Среди трёх чисел по крайней мере два имеют одинаковый остаток при делении на 3. Второй игрок оставляет именно их. Тогда сумма двух оставшихся чисел не делится на 3. Значит, выигрывает второй игрок.

Ответ: второй игрок (Стич).

17.10. У Лило было 11 пустых мешочков и много конфет. Стич предложил игру на двоих: за один ход можно положить по одной конфете ровно в 10 мешочков. Тот, после хода которого впервые в каком-то мешочке окажется 21 конфета - заберет все конфеты. Играть какой по счету должна Лило, если она очень хочет победить?

Решение: Второй. Занумеруем коробки: $1, \ldots, 11$ и будем обозначать ход номером той коробки, куда мы не клали монету. Можно считать, что первый игрок начал игру ходом 1. Чтобы победить, второму надо, независимо от игры первого, сделать ходы $2, \ldots, 11$. Этими десятью ходами вместе с ходом первого в каждую коробку будет положено по 10 монет. Кроме того, найдется коробка (назовем ее A), в которую первый каждым своим ходом со 2 по 11 клал по монете. Тем самым, после 11 хода первого в коробке A окажется 20 монет, и ни в какой коробке не окажется больше. Второй игрок своим 11-м ходом должен положить монеты так, чтобы в коробку A попала монета. Тем самым, он выигрывает.

Ответ: второй.

17.11. На пляже лежат 10 кучек кокосов: в первой 1 кокос, во второй $2, \ldots,$ в десятой 10 кокосов. Лило и Стич по очереди забирают по одному кокосу из какой-нибудь одной кучки. Игра заканчивается, когда на пляже останется ровно три кокоса. Если эти три кокоса лежат в трёх отдельных кучках по одному, то выигрывает Стич, а во всех остальных случаях — Лило. Кто может выиграть при правильной игре, если Лило ходит первой?

Решение: Назовём кучки из одного кокоса **одиночками**, а кучки из двух кокосов — **двойками**. Пусть первый игрок придерживается такой стратегии:

1. если на пляже есть одиночка, забрать кокос именно из неё;
2. никогда не брать кокос из двойки.

Почему эта стратегия всегда осуществима? В начале общее число кокосов нечётно. Значит, перед каждым ходом первого игрока на пляже тоже нечётное число кокосов. Следовательно, хотя бы одна кучка имеет нечётный размер, то есть существует кучка, из которой можно взять кокос, не нарушая правила «не брать из двоек». После самого первого хода первого игрока одиночек на пляже не останется. После хода второго игрока может появиться не более одной новой одиночки, и тогда первый тут же её уберёт. Значит, после каждого хода первого игрока одиночек нет, а после каждого хода второго — не больше одной. В частности, так будет и в конце игры: ситуация с тремя одиночками невозможна. Следовательно, выигрывает первый игрок.

Ответ: первый игрок (Лило).