16. Инвариант. Решения

Инвариант (от лат. invarians - неизменяющийся), в математике - величина, остающаяся неизменяемой при тех или иных преобразованиях. Пример:

- В класс заходят по по 2 человека, инвариант- чётность количества учеников.

- На окружности написаны числа. Разрешается прибавить 1 к двум соседним числам. Инвариант- Сумма чисел на четных позициях минус сумма на нечетных позициях не меняется.

- Вы складываете по 3 числа идущих подряд, инвариант- все суммы будут делиться на 3

16.0. *На доске написано десять плюсов и пятнадцать минусов. Разрешается стереть любые два знака и написать вместо них плюс, если они одинаковы, и минус в противном случае. Какой знак останется на доске после выполнения двадцати четырех таких операций?*

Решение: Заменим каждый плюс числом 1, а каждый минус числом -1. Разрешенная операция описывается тогда так: стираются любые два числа и записываются их произведение. Поэтому произведение всех написанных на доске чисел остается неизменным. Так как вначале это произведение равнялось -1, то и в конце останется число -1, то есть знак минус.

Ответ: Минус .

При сдаче каждой задачи необходимо предъявить инвариант!

16.1. 100 обезьян выстроились в ряд. Обезьяны, стоящие через одну, могут меняться местами, перепрыгивая через обезьяну между ними. Могут ли обезьяны с помощью таких прыжков встать в обратном порядке?

Решение: Занумеруем места, на которых стоят обезьяны, числами от 1 до 100. Заметим, что после перепрыгивания номер каждой обезьяны либо не изменился, либо изменился (увеличился или уменьшился) на 2. Таким образом, обезьяна, стоящая вначале на месте с чётным номером, в любой момент будет стоять на месте с чётным номером. Следовательно, обезьяна, стоящая на месте номером 100, никогда не сможет попасть на место обезьяны с номером 1.

Ответ: Нет .

16.2. Турист едет по одной прямой дороге. Сначала он проехал 1 км от дома, затем 3 км в том же или в противоположном направлении, затем 5 км в том же или в другом направлении и т. д. Могло ли случиться так, что после 57-го этапа пути он оказался в исходной точке?

Решение: После каждого этапа пути четность расстояния (в км) между исходной точкой и той, где находится турист, меняется. Значит, после 57-го прыжка турист будет на нечетном расстоянии от исходной точки и не сможет в ней оказаться.

Ответ: Нет .

16.3. Турист отправился в путешествие по разным странам. Сначала у него была одна монета — 1 рубль. В каждом городе он может воспользоваться обменным автоматом, который меняет одну монету на пять монет другой страны. Например, 1 рубль можно обменять на 5 тугриков, потом 1 тугрик — на 5 песо, потом 1 песо — на 5 динаров и так далее. Может ли турист после нескольких таких обменов получить ровно 2027 монет?

Решение: Рассмотрим остаток от числа монет при делении на 4. Легко видеть, что после каждой операции число монет увеличивается на 4, потому что одна монета заменяется пятью другими. Значит, остаток при делении на 4 не меняется. В исходном положении монета одна, то есть число монет дает остаток 1 при делении на 4. Следовательно, и после любого числа операций число монет должно давать остаток 1. Но число 2027 при делении на 4 дает остаток 3. Поэтому получить 2027 монет невозможно.

Ответ: Нельзя .

16.4. Шесть друзей путешествуют по разным городам. К некоторому моменту первый из них посетил 1 город, второй – 2 города, третий – 3, четвёртый – 4, пятый – 5, а шестой – 6 городов. Каждый следующий день можно выбрать любых двух друзей и отправить каждого из них ещё в один новый город. Можно ли за несколько дней сделать так, чтобы у всех шестерых стало одинаковое количество посещённых городов?

Решение: Рассмотрим сумму количеств посещенных городов. Сначала она равна 21. За день к двум числам одновременно прибавляют по единице, значит, сумма увеличивается на 2. Следовательно, после любого числа дней сумма останется нечётной. Но если бы все шесть чисел стали равными, то их сумма была бы равна произведению 6 на некоторое число, а значит, была бы чётной. Получили противоречие. Поэтому сделать все числа равными нельзя.

Ответ: Нет, нельзя .

16.5. Из стакана молока три ложки содержимого переливают в стакан с чаем и небрежно помешивают. Затем зачёрпывают три ложки полученной смеси и переливают их обратно в стакан с молоком. Чего теперь больше: чая в стакане с молоком или молока в стакане с чаем?

Решение: Инвариантом в задаче служат объемы жидкостей в стаканах. После переливаний объёмы жидкостей не изменились, но из стакана с молоком некоторое количество молока ушло в другой стакан, и заменилось на такое же количество чая (ведь объем не изменился). Получается, что объем чая в молоке такой же, как объем молока в чае, они просто заменили друг друга.

Ответ: Поровну .

16.6. В каждой ячейке ящика сидит какое-то животное: ежик или хомяк. За один ход можно поменять животных в одной строке или в одном столбце: каждый ежик становится хомячком, а каждый хомячок становится ежиком. Мария Францевна посадила в одну ячейку ежика, а в другие – хомячков. Можно ли сделать так, чтобы в результате таких действий в клетке были только ежики, если размер ящика: а) 2×2 б) 3×3 в) 4×4

Решение: а) На доске всегда будет нечетное количество ежиков, с каким бы столбцов мы ни проводили операцию. В конце количество ежиков должно быть четно. Значит нельзя.

б, в) Выделим в большой доске квадрат 2×2 с ежиком. В рамках этого квадрата происходит всё то же самое, что в пункте а). Раз нельзя полностью заставить ежиками квадрат 2×2, то и всю доску тем более не получися.

Ответ: Нельзя во всех пунктах .

16.7. На нить нанизаны две бусины, слева — красная бусина, справа — синяя. Разрешается производить любую из двух операций: вставку двух бусин одного цвета подряд в любом месте нити и удаление любых двух соседних одноцветных бусин. Можно ли за конечное число операций оставить на нити ровно две бусины: красную справа, а синюю – слева?

Решение: Заменим красные бусины нулями, синие, стоящие на чётных (считая слева) местах, – единицами, а стоящие на нечётных местах – минус единицами. Легко видеть, что допустимые операции не меняют сумму этих чисел. В исходном положении эта сумма равнялась 1, значит, и всегда будет равна 1. Поэтому получить желаемое расположение бусин (с суммой -1) невозможно.

Ответ: Нельзя .

16.8. В таблице 11×11 в каждой клетке стоит знак «+» или «-». За одну операцию разрешается поменять знак во всех клетках "креста" на противоположный. (Крест — объединение произвольного столбца и строки.) Верно ли, что из любого начального положения знаков можно получить таблицу со всеми плюсами?

Решение: Каждая перемена знаков в кресте меняет четность количества плюсов в каждом столбце. Соответственно, если в каких-то двух столбцах была разная четность количества плюсов, то она всегда разной и останется.

Ответ: Нельзя .

16.9. В заповеднике имеется прямоугольная решётка размером m×n. Сначала робот-смотритель Иса случайным образом активирует один узел решётки (ставит на нём «1»). Затем включается алгоритм распространения сигнала: на каждом шаге разрешается активировать любой неактивный узел, у которого количество уже активированных соседей (по стороне) нечетно. Сможет ли алгоритм в итоге активировать все узлы решётки при любом начальном выборе узла Исой, если размеры решётки: а) 8×9; б) 8×10?

Решение: а) Сначала закрасим ряд длиной 9 клеток, содержащий изначально закрашенную клетку (см. первый рисунок). Далее будем красить столбцы через один, начиная закраску от покрашенного ряда (см. второй рисунок). После этого закрасить оставшиеся клетки доски совсем просто.

б) *Первый способ.* Посмотрим на полупериметр фигуры, состоящей из закрашенных клеток. Вначале, когда закрасили одну клетку, полупериметр равен 2. На каждом шаге полупериметр или увеличивается на 1 (если у клетки была только одна соседняя закрашенная клетка) или уменьшается на

1 (если таких соседей было 3), то есть полупериметр увеличивается или уменьшается на 1. Следовательно, когда закрашено чётное число клеток, полупериметр закрашенной фигуры нечётен. Заметим, что полупериметр всего прямоугольника 8×10 равен 18, то есть чётный, поэтому весь прямоугольник закрасить нельзя.

Второй способ. Докажем, что для чётных m и n прямоугольник $m\times n$ нельзя закрасить ни при какой начальной закрашенной клетке. Посмотрим, сколько всего сторон имеют клеточки (включая внешние). Сторон клеточек $m(n+1)+n(m+1)=2mn+m+n$, то есть чётное число. Предположим, что мы смогли закрасить весь прямоугольник. Будем называть сторону закрашенной, если закрашена хотя бы одна из прилегающих к ней клеток. Вначале закрашено 4 стороны. На каждом шаге закрашивается 1 или 3 стороны. Всего таких шагов нужно сделать nm-1. Поскольку m и n чётны, то число nm-1 нечётно. Итак, если бы мы смогли закрасить весь прямоугольник, то было бы закрашено 4+(нечётное число раз по нечётному числу) сторон, то есть нечётное число, но, как мы уже посчитали, таких сторон чётное число, значит, весь прямоугольник закрасить нельзя

Ответ: а) Да; б) нет. .