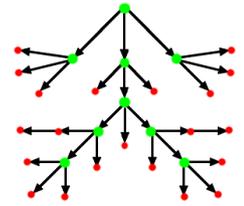


12. Оценка + пример. Решения

12.0. В пруд пустили 30 щук, которые постепенно поедают друг друга. Щука считается сытой, если она съела не менее трёх щук (сытых или голодных). Какое наибольшее число щук может насытиться?



Решение: Обозначим через s число сытых щук. Тогда они вместе съели не менее $3s$ щук. Поскольку каждая щука может быть съедена лишь однажды, и хотя бы одна щука осталась в конце, $3s < 30$. Следовательно, $s \leq 9$. Приведем пример, при котором насытились ровно 9 щук. Пусть 7 щук с (3-й по 9-ю) съели 21 щуку (с 10-й по 30-ю; каждая съела по 3 щуки). После этого осталось 9 щук. Первая и вторая могут насытиться, съев 6 щук (с 4-й по 9-ю).

Ответ: 9 щук .

12.1. Доктор Стрэндж собрал 10 мистических рун, уровни силы которых выражаются натуральными числами от 1 до 10. Мастеру мистических искусств нужно разделить их на две группы для сложного заклинания так, чтобы произведение уровней силы в первой группе делилось на произведение уровней силы во второй группе. Какое наименьшее значение может принимать результат этого деления (частное)?

Решение: Оценка. Руна с числом 7 должна быть в первой группе, поскольку число 7 простое и никакое другое число на него не делится. Следовательно, частное не меньше 7. Приведём пример разбиения, при котором частное равно 7. Первая группа: 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7; вторая группа: 8, 9, 10. Таким образом, наименьшее значение частного равно 7.

Ответ: 7 .

12.2. После напряжённой битвы Тони Старк решил угостить команду своими фирменными энергетическими батончиками. У него есть 5 одинаковых батончиков, а героев за столом собралось 6. Тони может разрезать любой батончик на части. Какое наименьшее число разрезов ему придётся сделать, чтобы разделить всё угощение строго поровну между всеми присутствующими?

Решение: Оценка. Если хотя бы один из батончиков будет целым, то получивший его будет иметь большую часть, чем другие. Значит, надо резать каждый батончик, то есть разрезов не менее 5. Пример. От каждого батончика отрезем $1/6$. Пять мстителей возьмут по большому куску батончика, шестой - пять маленьких кусков. Каждый получит по $5/6$ батончика.

Ответ: 5 .

12.3. У Тони Старка 48 роботов-помощников, которые должны починить четыре двигателя у 60 межгалактических кораблей. У одного корабля одновременно нельзя чинить больше одного двигателя. Как быстро мстители отправятся в путь, если один робот чинит двигатель за 5 минут?

Решение: Потребуется не меньше $\frac{60 \cdot 4 \cdot 5}{48} = 25$ минут. Но для этого надо, чтобы никто из роботов не простаивал. Достаточно показать, что четыре робота могут починить двигатели пяти кораблям за 25 минут. Для этого расположим пять кораблей по кругу. Четыре робота подходят к четырём первым кораблям и чинят (за 5 минут) по одному двигателю. Затем каждый переходит к следующему по часовой стрелке кораблю и т. д.

Ответ: 25 минут .

12.4. Щ.И.Т. устанавливает сенсоры наблюдения на карте Нью-Йорка, разбитой на сетку 8×8 кварталов. Какое наименьшее число сенсоров нужно разместить так, чтобы выполнялось условие: а) В любом квадрате 2×2 квартала был хотя бы один активный сенсор? б) В любом Г-образном участке из трёх кварталов (уголке) был хотя бы один активный сенсор?

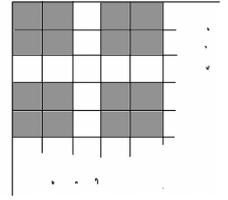
Решение: Оценка. Разобьем наш квадрат на 16 квадратиков 2×2 . В пункте а) в каждом из них должен быть хотя бы один сенсор (иначе будет квадратик без сенсоров), так что сенсоров не меньше 16. В пункте б) в каждом из этих квадратиков должно быть хотя бы два сенсора, иначе в этом квадратике поместится незакрашенный уголок. Поэтому в пункте б) нужно закрасить не меньше 32 клеток. Пример. В пункте а) разместим сенсоры на клетки A1, A3, A5, A7, C1, C3, C5, C7, E1, E3, E5, E7, G1, G3, G5, G7 (обозначения клеток — как на шахматной доске). Легко видеть, что сенсоры стоят на 16 клетках, и при этом в любом квадратике 2×2 есть ровно один сенсор. В пункте б) можно использовать, например,

обычную шахматную раскраску: при этом будет 32 сенсора, а в каждом трёхклеточном уголке будет хотя бы 1 сенсор.

12.5. Доктор Стрэндж хочет защитить площадку в виде квадрата 29×29 от тёмных сил. Для этого ему надо разместить заклинания в форме квадратов 2×2 по линиям сетки так, чтобы больше ни одно такое заклинание на площадку не влезло (заклинания не могут перекрываться). Какое минимальное количество заклинаний ему нужно создать?

Решение:

Оценка. Нарисуем на поле квадраты 2×2 так, чтобы между ними было расстояние в 1 клетку (см рисунок). Если какой-то из нарисованных квадратов никак не будет перекрываться размещенными заклинаниями, то можно разместить еще 1 заклинание ровно на нарисованный квадрат. Заметим, что одно заклинание может перекрыть не более одного квадрата. Значит, нам нужно будет минимум столько же заклинаний, сколько квадратов мы нарисовали, чтобы больше ни одного не поместилось. Нарисованных квадратов 100. Пример - разместим 100 заклинаний по раскраске.



Ответ: 100 .

12.6. Енот Ракета хочет собрать новые пушки для команды, но для каждой пушки нужны любые три различные детали. Какое наибольшее количество пушек сможет сделать Ракета, имея 20 гаек, 30 железяк, 40 межгалактических камней и 50 мотков синей изоленты?

Решение: Оценка. Отложим пока изоленту в сторону. Осталось $20 + 30 + 40 = 90$ деталей. Поскольку для пушки нужно не более одного мотка изоленты, каждая пушка потребует из этих 90 деталей по крайней мере две. Значит, пушек получится не более чем $\frac{90}{2} = 45$. Пример. 5 пушек собираем из гайки, железяки, и изоленты; 15 пушек – из гайки, межгалактического камня и изоленты; 25 пушек – из межгалактического камня, железяки и изоленты.

Ответ: 45 .

12.7. У призрачного гонщика есть 5 звеньев цепи, в каждом по 3 кольца. Найдите минимальное число колец, которое ему понадобится расковать, чтобы соединить всё в одну цепь.



Решение: Пример: расковываем 3 кольца из одного звена. Оставшиеся 4 звена соединяем тремя раскованными кольцами. Оценка: если расковать меньше 3 колец, то останется по крайней мере 5 отдельных звеньев, для соединения которых нужно по крайней мере 4 раскованных кольца – противоречие.

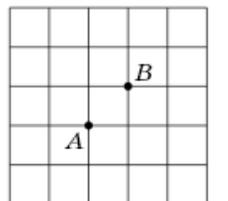
Ответ: 3 .

12.8. Полиция Нью-Йорка взяла отпуск и понадеялась на Человека Паука. Питер Паркер сильно устает, поэтому каждый день ловит преступников не больше, чем в предыдущий день. Всего за пять дней он поймал 100 преступников. Какое наименьшее суммарное число он мог задержать за три дня - понедельник, среду и пятницу?

Решение: Оценка. Во вторник и в четверг человек-паук поймал преступников не больше, чем в понедельник и в среду, значит, за указанные три дня он поймал не меньше половины от 100, то есть не меньше 50 преступников. Пример. Если в каждый из первых четырех дней человек-паук ловил по 25 преступников, а в пятницу не поймал никого, то условия задачи выполнены, и за указанные три дня поймано ровно 50 преступников.

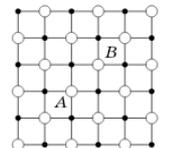
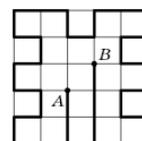
Ответ: 50 .

12.9. Человек-паук патрулирует улицы города от своего дома (точка А на плане) до Дейли Бьюгл (точка В). Он перемещается строго по линиям сетки. Герой хочет, сделать свой маршрут как можно длиннее, но дважды оказываться в одном и том же месте ему не позволяет время, и он так не делает. Нарисуйте на плане самый длинный возможный маршрут и докажите, что более длинного нет.



Решение:

Пример. Один из возможных маршрутов туриста изображён на рисунке слева. Двигаясь по этому пути, турист пройдёт 34 улицы (улицей мы называем отрезок между двумя соседними перекрестками). Оценка. Всего в городе 36 перекрёстков. Всякий раз, когда человек-паук проходит очеред-



ную улицу, он попадает на новый перекрёсток. Таким образом, больше 35 улиц человек-паук преодолеть не сможет (начальный перекрёсток А не считается). Покажем, что посетить 35 перекрёстков (и, следовательно, пройти 35 улиц) герой тоже не сможет. Для этого раскрасим перекрёстки в чёрный и белый цвета в шахматном порядке (рис. справа). Всякий раз, пролетая улицу, человек-паук попадает на перекрёсток другого цвета. И дом, и Дейли Бьюгл расположены на белых перекрёстках. Поэтому любой маршрут содержит чётное число улиц, а число 35 нечётно.

Ответ: Максимальная длина маршрута – 34.

12.10. В школу для одаренных детей профессора Ксавьера поступило N новых мутантов с уровнями опасности $1, 2, \dots, N$. Профессор хочет определить, у кого какой уровень опасности. Для этого он может направить против каждого ученика любое количество учебных стражей любых уровней сложности (сложность - натуральное число), и каждый мутант победит всех стражей, чья сложность не превосходит его уровня опасности. Какое минимальное количество стражей надо послать профессору, чтобы точно определить уровень опасности каждого мутанта?

Решение: Оценка. Рассмотрим стражей уровней сложности d , где $2 \leq d \leq N$. Пусть один из таких стражей не будет направлен против двум мутантов. Уровни опасности этих мутантов могут оказаться $d - 1$ и d . Оба мутанта победят всех более слабых стражей и оставят всех более сильных, поэтому уровни опасности этих мутантов не различить. Значит, для каждого d от 2 до N включительно стражей сложности d требуется хотя бы $N - 1$, а всего стражей тогда нужно хотя бы $(N - 1)^2$. Пример. Дадим каждому мутанту, кроме последнего, стражей всех сложностей от 2 до N включительно. Получив такой набор, мутант выдаст свой уровень опасности: он равен максимальному уровню сложности побежденного стража или 1, если ни один страж не был не побежден. Уровень опасности последнего мутанта определим методом исключения.

Ответ: $(N - 1)^2$.