11. Разнобой. Решения

11.1. Известно, что А+АА=ДЫМ. На какую цифру заканчивается произведение К·О·С·Т·Ё·Р? Разные буквы обозначают разные цифры.

Решение: Всего различных букв 10, значит представлены все цифры. Какую цифру обозначает буква "А"? Точно больше 8: $8+88=96$, а число должно получиться трёхзначное. Такая цифра только одна, и это 9. $9+99=108$. Среди оставшихся цифр есть и 5, и 2, они в произведении дадут 10, следовательно, произведение заканчивается на 0.

Ответ: 0 .

11.2. Ёжик решил подарить друзьям подарки. Для этого он разложил все свои 25 конфет по восьми подарочным пакетам. Получил ли кто-то из друзей одинаковое количество конфет (возможно, ни одной) и почему?

Решение: Допустим, все получили разное количество. Тогда конфет подарено хотя бы $0+1+2+3+4+5+6+7=28>25$. Значит, кто-то получит одинаковое количество.

Ответ: есть те, что получил одинаковое количество конфет

.

11.3. На площадке стояло несколько скамеек в один ряд. Между каждыми двумя скамейками поставили еще одну скамейку. Потом, при расширении площадки, все скамейки переставили (не добавляя новых), составив из них круг. А при следующем расширении площадки между каждыми двумя скамейками снова поставили еще одну скамейку. Придя на площадку после последнего расширения, Крош насчитал 2026 скамеек. Сколько скамеек было изначально?

Решение: Будем идти от результата к началу. Когда площадку расширяли в последний раз, добавили столько же скамеек, сколько уже было. Значит, было $2026:2=1013$ скамеек. От перестановки число скамеек не поменялось. До перестановки добавили столько скамеек, сколько было промежутков между скамейками, а промежутков на 1 меньше, чем скамеек. Значит добавили $(1013-1):2=506$ скамеек, а было изначально 507.

Ответ: 507 скамеек .

11.4. В отчёте об испытаниях беспилотного трамвая всего 2026 натуральных чисел. Аналитики обнаружили, что сумма любых 2025 из них нечётна. Докажите, что все натуральные числа в отчёте нечётны

Решение: Рассмотрим сумму первых 2025 чисел. Она нечётна по условию. Аналогично, сумма последних 2025 чисел нечётна. Разность этих сумм чётна и равна разности первого и последнего чисел. Следовательно, первое и последнее число одинаковой чётности. Теперь возьмём сумму всех чисел, кроме второго. Она нечётна, в ней 2025 чисел и она отличается от суммы 2025 последних чисел на разность первого и второго. Значит второе той же чётности, что и первое. Будем продолжать, пока не получим, что все числа одной чётности с первым. Теперь мы знаем, что сумма 2025 чисел одинаковой чётности нечётна. Этого не может быть, если эти числа чётные, следовательно все они нечётны.

11.5. Перед занятием Малого мехмата провели опрос шестиклассников. Каждый из них идёт на матпраздник или на отбор в 54 школу (некоторые и туда, и туда). Выяснилось, что 20% шестиклассников, идущих на матпраздник, идут на отбор в 54 школу, а 25% шестиклассников, идущих на отбор в 54 школу, идут на матпраздник. Сколько шестиклассников опрошено, если известно, что их больше 25, но меньше 35?

Решение: Пусть шестиклассников, идущих на оба мероприятия, n. Тогда на матпраздник идёт $5n$, а на отбор $4n$. Всего опрошенных будет $5n+4n-n=8n$. Между 25 и 35 ровно одно число делится на 8, и это 32.

Ответ: 32 .

11.6. Трус не играет в хоккей! А «Метеор» и «Вымпел» играют! Кассандра сделала пять прогнозов, из которых три оказались верными:

1. ничьей не будет;

2. в ворота «Метеора» забьют;

3. «Вымпел» выиграет;

4. «Вымпел» не проиграет;

5. всего будет забито 3 шайбы.

С каким счётом закончился матч?

Решение: Предположим, «Вымпел» выиграл. Тогда он не проиграл, в ворота «Метеора» забили и не было ничьей. Это 4 прогноза, а верных всего 3. Значит, выиграть «Вымпел» не может. Предположим, «Вымпел» свёл матч вничью. Тогда неверен прогноз на отсутствие ничьей и на количество забитых шайб, и это уже три неверных прогноза. Получается, «Вымпел» проиграл: не было ничьей, в ворота «Метеора» забили и всего было забито три шайбы. Это означает, что счёт 2-1 в пользу «Метеора».

Ответ: 2-1 в пользу «Метеора» .

11.7. Пин 12 дней записывал в журнал, сколько новых изобретений он сделал за день (например, 0, если он в этот день отдыхал). Докажите, что среди трехдневных групп (3 дня, не обязательно идущие подряд) есть такие, что разность числа изобретений (одна тройка минус вторая тройка) делится на 200.

Решение: Посмотрим, сколько вообще трёхдневных групп может быть. Первый день можно выбрать 12 способами, второй – 11 способами, третий – 10 способами. При этом порядок дней в группе не важен, поэтому каждую группу мы посчитали 6 раз. Итого групп $2 \cdot 11 \cdot 10 = 220$.

Заметим теперь, что разность $a - b$ делится на число d тогда и только тогда, когда a и b дают одинаковые остатки при делении на d. Всего остатков бывает 200, а чисел у нас 220. Такая пара чисел найдётся по принципу Дирихле.

11.8. Кар Карыч долго и упорно перемножал девятки. Когда он закончил, получил число, оканчивающееся на несколько девяток. После чего он пошел к Лосяшу и попросил проверить результат. Лосяш взглянул на число и сказал, что на конце слишком много девяток. Сколько девяток ему хватило для такого вывода?

Решение: Уподобимся Кар Карычу и будем перемножать девятки, внимательно глядя на последние цифры. 9, 81, 729, 6561, ... Заметим, что первая цифра начала повторяться, причём она или 1, или 9. Значит, одной девятки Лосяшу бы для вывода не хватило. Дальше будем смотреть на две цифры: 49, 41, 69, 21, 89, 01, 09, 81. Теперь последние две цифры будут повторяться, а двух девяток мы так и не увидели. Значит, Лосяшу хватило бы двух.

Ответ: двух девяток достаточно .

11.9. Юный математик Вовочка хотел бы назвать какой-нибудь математический объект в свою честь. Чем он хуже Фибоначчи или Ферма? Вот, например, последовательность подряд идущих натуральных чисел. Первое делится на 1, второе на 3, третье на 5 и так далее. Вовочке 11 лет, поэтому он хочет назвать *последовательностью Вовочки* такую последовательность из 11 чисел. А она вообще существует?

Решение: Да, последовательность Вовочки существует. Перемножим $1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 7 \cdot 9 \cdot 11 \cdot 13 \cdot 15 \cdot 17 \cdot 19 \cdot 21$ и назовём это число V. $\frac{V+1}{2}$ делится на 1, $\frac{V+3}{2}$ делится на 3 и так далее, причём эти числа идут подряд.