0. (На разбор) В государстве 10 городов. Каждая дорога связывает два города. Из первого города выходит 1 дорога, из второго — 4 дороги, из третьего — 4 дороги, из четвёртого — 4 дороги, из пятого — 3 дороги, из шестого — 2 дороги, из седьмого — 4 дороги, из восьмого — 5 дорог, из девятого — 7 дорог, из десятого — 2 дороги. Сколько всего дорог в государстве?

1. В государстве 8 городов. Каждая дорога связывает два города. Из каждого города выходит по 5 дорог. Сколько всего дорог в государстве?

2. Джараксус сказал, что архипелаг «Расколотые острова» в сумме насчитывает 25 островов, а Рагнарос сказал, что каждый из островов этого архипелага соединён мостами с тремя другими. Докажите, что кто-то из них ошибся.

3. Докажите, что число людей, когда-либо живших на Земле и сделавших нечётное число рукопожатий, чётно (считаются только рукопожатия между двумя людьми).

4. Восемь шахматистов во время турнира должны сыграть друг с другом по одной партии. В какой-то момент турнира шахматистов попросили подсчитать, сколько партий они уже сыграли. Могли ли у них получиться следующие результаты?
а) 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4, 4.
б) 2, 2, 3, 4, 5, 5, 6, 6.
в) 2, 2, 3, 4, 4, 5, 6, 8.
г) 1, 2, 2, 4, 5, 6, 7, 7.

5. В государстве не менее 1 и не более 18 городов. Каждая дорога связывает два города. Из 40% городов выходит по 4 дороги, а из остальных — по 5 дорог. Сколько всего дорог в государстве? Перечислите все возможные случаи.

6. В государстве 7 городов. Каждая дорога связывает два города. Каждые два города соединены не более чем одной дорогой. Из каждого города выходит либо 3 дороги, либо 6 дорог. Сколько всего дорог в государстве? Перечислите все возможные случаи.

Дополнительные задачи

7. В классе 33 ученика — 18 мальчиков и 15 девочек. Каждый мальчик дружит с 5 девочками. Может ли быть так, что
а) все девочки дружат с разным количеством мальчиков?
б) несколько девочек дружат с 5 мальчиками, а остальные — с 7?
в) несколько девочек дружат с 4 мальчиками, а остальные — с 8?
г) все девочки дружат с одинаковым количеством мальчиков?
д) несколько девочек дружат с 4 мальчиками, а остальные — с 7?

8. В городе есть дороги трёх типов: однополосные, двухполосные и трёхполосные. На каждом перекрёстке в городе сходятся три дороги разных типов. Иначе говоря, каждый перекрёсток есть разделение трёхполосной дороги на однополосную и двухполосную. Ни одна дорога не заходит в тупик. Ровно три дороги выходят за пределы города. Докажите, что это дороги трёх разных типов.