

Вступительная олимпиада 2024/2025 учебного года

5 класс, устный тур 28.09.2024. Все задачи и решения

1. **Условие.** “Мы делили апельсин, много нас, а он один . . .”

Ёж, чиж, утята, котята, бобёр и волк делили апельсин. Каждому досталось целое число долек. Известно, что:

- ежу досталось на одну дольку меньше, чем чижу;
- бобру досталось в два раза больше долек, чем ежу;
- каждому утёнку и котёнку досталось по одной дольке;
- ежу и чижу в сумме досталось больше долек, чем в сумме досталось бобру и волку;
- чижу досталось меньше долек, чем утятам и котяткам в сумме;
- апельсин можно было бы поделить поровну между ежом, чижом, бобром и волком, и тогда каждому досталось бы столько долек, сколько сейчас досталось утятам и котяткам в сумме;
- в апельсине меньше 30 долек.

Сколько долек в апельсине?

Ответ. 28

Решение. Для краткости введём переменные.

Пусть ежу досталось x долек, тогда чижу досталось $x + 1$ долек, а бобру — $2x$ долек. Из условия “ежу и чижу в сумме досталось больше долек, чем в сумме досталось бобру и волку” понимаем, что волку досталось 0 долек. Пусть утят и котят было y . Тогда всего в апельсине $4x + 1 + y$ долек, и это число из предпоследнего условия равно $4y$. Значит, $4x + 1$ делится на 3 (и равно $3y$). Переберём, при каких x это получится и будут соблюдаться все условия задачи.

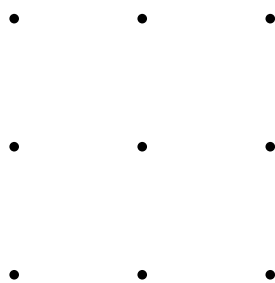
$x = 2$: тогда $y = 3$, чижу досталось 3 дольки — не подходит;

$x = 5$: тогда $y = 7$, чижу досталось 6 долек, в апельсине 28 долек — подходит;

$x = 8$: тогда $y = 11$ и в апельсине уже больше 30 долек. При увеличении x будет тем более больше 30 долек.

Комментарии. Нет.

2. **Условие.** Из 9 точек (см. рисунок) нужно выбрать 3 точки так, чтобы они были вершинами прямоугольного треугольника. Сколькими разными способами можно это сделать?



Ответ. 44

Решение. Аккуратный перебор, например, по вершине прямого угла.

Комментарии. В задаче есть две сложности. Первая - выбор верного способа перебора. Вторая - осознать, что прямой угол есть не только у треугольников с вертикальными и горизонтальными катетами.

3. **Условие.** Вовочка вырезал из клетчатой бумаги квадрат 24×24 и нарисовал на нём несколько отрезков. Разрезав квадрат по этим отрезкам, он получил несколько прямоугольников 3×6 и несколько квадратов 4×4 (лишних деталей не осталось). Какой может

быть суммарная длина отрезков, проведённых Вовочкой? Перечислите все возможные варианты.

Ответ. 240

Решение. Если резать только на квадраты 4×4 , получится 240. Почему?

Квадратов 36, каждый даёт периметр 16 ($36 \cdot 16 = 576$). Периметр квадрата 24×24 равен 96. Значит, $576 - 96 = 480$ - удвоенный периметр внутри, так как каждый отрезок внутри посчитан дважды. Итого - 240.

Если резать иначе, всё равно получится 240. Почему? Ответ зависит от суммы периметров, а у каждой из фигур периметр равен площади. Суммарная площадь не меняется, значит, и ответ тоже.

Комментарии. Нет.

4. **Условие.** Какое минимальное число шахматных коней нужно расставить на клетках прямоугольной доски 3×5 , чтобы побить все её незанятые клетки?

Ответ. 4

Решение. Пример на 4 строится (A2, A3, A4, B3).

Оценка 1. Отметим клетки B1, B2, B3, B4 и заметим, что конь на любой позиции бьёт не более одной из этих клеток.

Оценка 2. Заметим, что есть только 3 клетки, с которых конь может бить 5 клеток. Если поставить 3 коней на них — не получится. Если поставить 3 коней на любые другие клетки — тоже не получится, так как сумма побитых клеток будет меньше 15.

Оценка 3. Сделаем оценку для доски 3×3 . Всегда нужен конь в центре, остальных клеток 8, каждый конь бьёт по 3. Нужно хотя бы 4 коня.

Комментарии. Нет.

5. **Условие.** Вовочка загадал число. Если бы он загадал число на единицу больше, то оно делилось бы на 5 и на 11, а если бы он загадал число на единицу меньше, то оно делилось бы на 3 и на 13.

а) приведите два разных примера чисел, которые мог загадать Вовочка;

б) докажите, что найдётся хотя бы 2024 таких числа.

Ответ. Например, 274 и 2419.

Решение. 274 подходит, дальше можно сколько угодно раз прибавлять по $55 \cdot 39 = 2145$. Любое такое число тоже подойдёт: если $n - 1$ делится на 55, то и $(n + 2145) - 1$ делится на 55, аналогично для $n + 1$.

Комментарии. Нет.