2.1. В вашем распоряжении есть несколько волшебных галеонов, с виду одинаковых. Однако среди них затесался один, заколдованный темными чарами — он тяжелее остальных. У вас есть волшебные весы, которые могут показать разницу в весе, но гирь для взвешивания у вас нет. Найдите заколдованный галеон, если: а) Галеонов 3, одно взвешивание; б) Галеонов 9, два взвешивания; в) Галеонов 27, три взвешивания.

Решение:

а) Взвесим любые два галеона. Если один из них тяжелее, значит, это и есть искомая монета. Если весы уравновешены, значит, тяжелый галеон — это третий, который не участвовал во взвешивании.

б) Положим на каждую чашу по три галеона. За первое взвешивание можно узнать, в какой группе из трех галеонов находится фальшивый, - она будет тяжелее. А из трех галеонов этой группы за одно взвешивание можно найти фальшивый по методу из пункта а).

в) Разделим галеоны на 3 кучки по 9 монет. Возьмем две и взвесим. По результату взвешивания узнаем, в какой кучке фальшивый галеон. Поделим эту кучку на кучки по 3, опять поймем, в какой из них фальшивый галеон. И у нас осталось 3 галеона, как найти в них фальшивый, - мы знаем.

2.2. Выберите веса трех кристаллов секретной материи так, чтобы ими можно было взвесить любое число граммов от 1 до 13 для звездолета джедая.

Ответ: кристаллы массой 1 г, 3 г и 9 г

Решение:

Чтобы доказать, что именно кристаллы массой 1, 3 и 9 граммов подходят для взвешивания любого веса от 1 до 13 граммов, нужно рассмотреть, какие числа можно получить, используя комбинации кристаллов на весах. Эти кристаллы подобраны на основе принципа представления чисел в троичной системе счисления.

Каждый кристалл может быть расположен на левой чаше весов, на правой чаше весов либо не использоваться.

В троичной системе чисел для покрытия диапазона от 1 до 13 граммов нам нужно выбрать веса, представляющие степени числа 3: $3^0=1$, $3^1 = 3$, $3^2 = 9$. Это дает минимальный набор кристаллов, так как позволяет сбалансировать вес на весах по троичной системе, при которой каждое число можно выразить как сумму степеней числа 3 с коэффициентами −1, 0 или +1, где:

- −1 означает, что гиря находится на левой чаше.
- +1 означает, что гиря находится на правой чаше.
- 0 означает, что гиря не используется.

Теперь проверим, как можно получить каждый вес от 1 до 13 с гирями 1, 3 и 9:

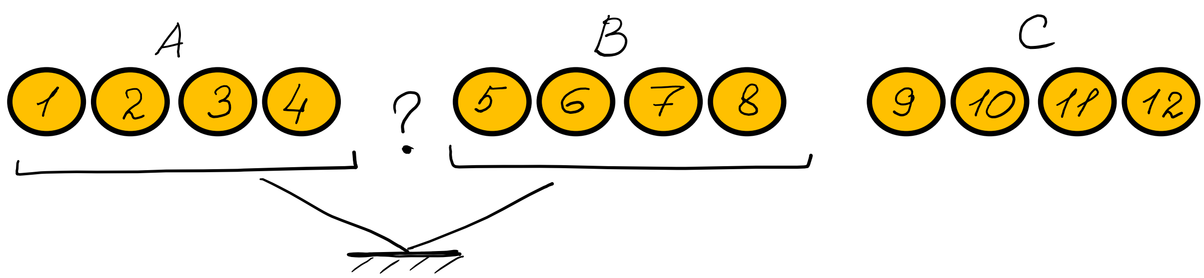
- Для веса 1: 1 на правой чаше.
- Для веса 2: 3 на правой и 1 на левой, что даёт 3−1=2.
- Для веса 3: 3 на правой чаше.
- Для веса 4: 3 и 1 на правой, что даёт 3+1=4.
- Для веса 5: 9 на правой, 3 и 1 на левой, что даёт 9-3-1=5.
- Для веса 6: 9 на правой и 3 на левой, что даёт 9−3=6.
- Для веса 7: 9 и 1 на правой, 3 на левой, что даёт 9−3+1=7.
- Для веса 8: 9 на правой и 1 на левой, что даёт 9−1=8.
- Для веса 9: 9 на правой чаше.
- Для веса 10: 9 и 1 на правой, что даёт 9+1=10.
- Для веса 11: 9 и 3 на правой, 1 на левой, что даёт 9+3−1=11.
- Для веса 12: 9 и 3 на правой, что даёт 9+3=12.
- Для веса 13: 9, 3, и 1 на правой, что даёт 9+3+1=13.

2.3. Капитан Джек Воробей нашёл сундук с 12 пиастрами, но что-то тут неладно — одна из монет фальшивая и отличается по весу от остальных. Проблема в том, что никто не знает, легче она или тяжелее. У Джека есть старинные весы, которые он может использовать лишь три раза. Как ему определить, какая монета фальшивая, и выяснить, легче она или тяжелее?

Решение:

Для начала разделим пиастры на 3 группы по 4: 1 2 3 4, 5 6 7 8, 9 10 11 12 (см. рисунок). Сравним первые две группы (ПЕРВОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ). Возможны три варианта:

1. первая группа (A) тяжелее, — значит фальшивая монета в первой или второй группе;
2. вторая группа (B) тяжелее, — значит фальшивая монета в первой или второй группе
3. группы равны, — значит фальшивая монета в третьей группе (C).



Рассмотрим **третий пункт**: когда группы A и B равны, а фальшивая монета в группе C. Задача: найти фальшивую монету из 4 монет за два взвешивания.

Формируем две группы: 1 2 3 (про них мы знаем, что они настоящие) и 9 10 11. Взвешиваем две этих кучки по три монеты (ВТОРОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ). Возможны такие ситуации:

1. **Весы уравновешены**, то есть 9 10 11 настоящие. Значит, фальшивая монета 12-я. Поймем, тяжелее она или легче: возьмем ее и сравним с 11-й (ТРЕТЬЕ ВЗВЕШИВАНИЕ)
2. **Весы не уравновешены**:

2.1 Монеты 1 2 3 тяжелее, чем 9 10 11. Отсюда следует, что фальшивая монета легче. В этом случае фальшивая монета среди 9 10 и 11. Находить фальшивую монету среди трех (за одно – ТРЕТЬЕ ВЗВЕШИВАНИЕ) мы научились в первой задаче.

2.2 Монеты 1 2 3 легче, чем 9 10 11. Отсюда следует, что фальшивая монета тяжелее. В этом случае фальшивая монета также среди 9 10 и 11. Находить фальшивую монету среди трех все еще умеем.

Теперь нужно разобраться с **первым** и **вторым** пунктами. В этом случае мы знаем, что монеты в группе C (9 10 11 12) настоящие и будем этим пользоваться. Мы уже поняли, что хорошо умеем находить фальшивую монету среди трех, - будем помнить об этом.

Рассмотрим **первый** пункт, когда первая группа тяжелее второй. То есть в одной из них одна фальшивая монета, но три остальных точно равны и настоящие. Разобьем монеты на две кучки хитрым образом: 1 9 10 11 и 5 2 3 4. В таком подходе мы точно знаем, что 9 10 11 настоящие. Почему такой подбор монет? Покажет ВТОРОЕ ВЗВЕШИВАНИЕ.

1. **Весы уравновешены**, то есть все монеты на весах настоящие. Осталось разобраться с 6 7 8. Во-первых, мы понимаем, что фальшивая монета легче, потому что она среди монет группы B. А мы рассматриваем первый пункт, где группа B легче. Во-вторых, у нас осталось ТРЕТЬЕ ВЗВЕШИВАНИЕ, чтобы найти фальшивую монету среди трех, - умеем.
2. **Левая кучка тяжелее правой**. В таком случае фальшивая монета либо 1-я, либо 5-я. Монеты 2 3 4 не могут быть фальшивыми (если одна из них фальшивая, то правая кучка будет тяжелее левой, - противоречие). За ТРЕТЬЕ ВЗВЕШИВАНИЕ найдем фальшивую монету среди 1 5 и 9, зная, что 9 настоящая. Если фальшивая 1, то она тяжелее. Если фальшивая 5, то она легче настоящей.
3. **Левая кучка легче правой**. В таком случае фальшивая монета среди 2 3 4. Монета 1 не может быть фальшивой (если она фальшивая, то есть тяжелее настоящей, то левая кучка будет тяжелее правой, - противоречие). Монета 5 не может быть фальшивой (если она фальшивая, то есть легче настоящей, то правая кучка будет легче левой, - противоречие). За ТРЕТЬЕ ВЗВЕШИВАНИЕ найдем фальшивую монету среди 2 3 4, и вспомним, что она будет тяжелее настоящей.

Второй пункт полностью аналогичен **первому**. Предлагаем его к самостоятельной проработке. Выше мы использовали комбинации 1 9 10 11 и 5 2 3 4. Здесь же перемешайте монеты так: 5 9 10 11 и 1 6 7 8.

2.4. В рождественской мастерской эльфы разложили 6 одинаковых на вид волшебных шариков по вершинам правильного шестиугольника, обозначив их A, B, C, D, E и F. Каждый шарик имеет свою магическую массу: в A — 1 г, в B — 2 г, и так далее, вплоть до F — 6 г. Но один проказливый эльф взял да и поменял местами два шарика, расположенных в противоположных вершинах. Как с помощью одного взвешивания на волшебных двухчашечных весах узнать, какие шарики оказались переставлены?

Решение:

Положим на левую чашу весов шарики из вершин A и E, а на правую — из вершин B и D. Если проказник поменял местами шарики в вершинах A и D, то на левой чаше будет лежать груз массой 4 + 5 = 9 грамм, а на правой — 1 + 2 = 3 грамма, и левая чаша перевесит. Если он поменял местами шарики в вершинах B и E, то на левой и правой чаше будет лежать 1 + 2 = 3 и 4 + 5 = 9 грамм соответственно, то есть правая чаша перевесит. Наконец, если он поменял местами шарики в вершинах C и F, то на чашах будет лежать 1 + 5 = 6 и 2 + 4 = 6 грамм, то есть весы будут в равновесии. Таким образом, по положению весов можно определить, какие шарики поменял местами проказник.

2.5. Скрудж Макдак нашёл 13 золотых яблок и хочет узнать их общий вес. У него есть весы, с помощью которых он может узнать суммарный вес любых 2 яблок. Как Скруджу за 8 взвешиваний узнать суммарный вес всех яблок?

Решение:

Занумеруем яблоки. Взвесим первое яблоко со вторым, второе с третьим и третье с первым, затем сложим полученные веса. В сумме получим удвоенный вес первых трех яблок. Зная это и, разделив значение пополам, узнаем суммарный вес трех первых яблок. Значит, за три взвешивания мы узнали суммарный вес первых трех яблок. Осталось пять взвешиваний и десять яблок, которые можем взвешивать попарно и, просуммировав все данные (вес первых трёх яблок и 5 весов пар яблок с четвёртого по тринадцатый), получим суммарный вес всех 13 яблок.

2.6. Док и Марти обнаружили десять мешков с монетами. Все монеты выглядят одинаково, но в одном из мешков находятся фальшивые монеты, каждая из которых весит 15 г, тогда как в остальных девяти мешках все монеты настоящие и весят по 20 г. Как, используя одно взвешивание на электронных весах, которые показывают точный вес, выяснить, в каком мешке находятся фальшивые монеты?

Решение:

Возьмём из первого мешка 1 монету, из второго — 2, из третьего — 3, ... , из последнего — 10 монет. Всего будет 1 + 2 + 3 +...+ 10 = 55 монет. Взвесим их. Если бы все они были настоящие, они весили бы (55×20) = 1100 г, но в нашем случае будут весить меньше. Если фальшивая монета одна — будет не хватать 5 г, если две — 10 г, ... если десять фальшивых монет — будет не хватать 50 г. Таким образом, зная, сколько не хватает до 900 г, мы сразу определим число фальшивых монет. А число фальшивых монет в свою очередь покажет нам номер мешка, в котором они лежат.

2.7. Эльза нашла четыре ледяных кристалла разного размера. Один из них самый большой и тяжелый, второй поменьше и полегче, третий еще меньше и еще легче, а четвертый — самый маленький и легкий. Эльза может по очереди ставить любой из кристаллов на одну из сторон волшебных весов. Не зная точного веса кристаллов, сможет ли она расположить их так, чтобы сначала три раза перевешивала одна сторона весов, а в последний раз — другая?

Решение:

Пусть самый тяжелый кристалл — A, второй по тяжести — B, третий — C и четвертый — D. Сначала положим на левую чашу кристалл B. Левая чаша перевесит. Затем добавим к ней кристалл D. Левая чаша опять перевесит. Теперь положим на правую чашу кристалл C. Т.к. B весит больше C, то левая снова перевесит. Теперь поставим кристалл A на правую чашу. Т.к. A > B и C > D, правая чаша перевесит.

2.8. У Белоснежки есть семь монет, разложенных по кругу. Она знает, что четыре из них, идущие подряд, заколдованы и легче остальных, но какие именно — неизвестно. Как Белоснежке за одно взвешивание на чашечных весах (без гирь) найти две из заколдованных монет, если все заколдованные монеты одинаково легкие?

Решение:

Заметив, что три настоящие монеты также лежат подряд, пронумеруем монеты по кругу, например, двигаясь по часовой стрелке, числами от 1 до 7. На одну чашу весов кладём монету № 1, а на другую – монету № 4. Возможны три случая:

- Если весы в равновесии, значит, обе монеты фальшивые, т. к. они не могут быть двумя настоящими из-за того, что стоящих подряд настоящих всего три, а между № 1 и № 4 не менее четырёх монет.
- Если монета № 1 легче, чем монета № 4, значит, монета № 1 – фальшивая, а № 4 – настоящая. Тогда в любой группе фальшивых монет, содержащих № 1, всегда будет присутствовать монета № 7. Значит, монета № 7 также фальшивая.
- Если монета № 1 тяжелее, чем монета № 4, то монета № 1 – настоящая. Следовательно, действуя аналогично пункту 2), монеты 4 и 5 – фальшивые.

2.9. У Фродо есть 10 волшебных колец с метками масс: 1 г, 2 г, ..., 10 г. Однако метки двух колец, массы которых отличаются на 1 г, перепутаны. Как Фродо за два взвешивания найти кольца, чьи метки неверны?

Решение:

Сравнение двух колец (по одному на каждой чаше весов) даёт только два разных результата (их метки либо перепутаны, либо нет), значит, такое взвешивание для нас бесполезно. Поэтому будем искать взвешивания двух колец против одного. Пусть на левую чашу весов положены кольца с метками m и n, а на правую — одно кольцо. Поскольку нам необходимы варианты как с равновесием, так и с отклонениями в обе стороны, а каждые перепутанные метки дают отклонения не более чем на 1 г, это кольцо должно иметь метку $m + n$. Тогда отклонения в одну сторону будут при перепутывании $m - 1$ и $n + 1$, или $m + 1$ и $n - 1$, а в другую — при обмене $m + 1$ и $n + 1$ или $m - 1$ и $n - 1$. Чтобы все эти перепутывания давали по 3 разных случая, m и n не должны отличаться на 1, ни одно из них не должно быть равно 1, а $m + n$ не должно быть равно 10. Например, годится $m = 3$, $n = 5$, $m + n = 8$. После результата «<» мы делаем вывод, что перепутаны «2» ⟷ «3», «4» ⟷ «5» или «8» ⟷ «9», после результата «>» — что перепутаны «3» ⟷ «4», «5» ⟷ «6» или «7» ⟷ «8». Равенство соответствует путаницам «1» ⟷ «2», «6» ⟷ «7» и «9» ⟷ «10». Второе взвешивание может быть в этих случаях разным, но можно придумать и единое взвешивание для всех трёх результатов, например, сравнить «2» + «5» с «7».