

Метод "от противного" или же "от обратного" часто применяется в решении математических задач и доказательстве теорем.

Сам метод можно условно разделить на 3 этапа:

- Устанавливаем какие варианты возможны при решении задачи или доказательстве теоремы. Например: угол может быть тупым, прямым или острым; значение переменной a может быть больше, меньше или равно значению переменной b .
- Доказываем для каждого нежелательного варианта, что он неверен.
- На основании того, что все нежелательные варианты отброшены и только один (желательный) остался нерассмотренным, делаем вывод что именно он верный.

В частном случае (в большинстве задач на сегодня) для начала нужно просто построить отрицание к тому утверждению, которое требуется доказать. Предлагается начать занятие с построения отрицаний к некоторым утверждениям.

Разминка (попробуйте корректно построить отрицания к следующим утверждениям):

- Антон родился в феврале
- Антон и Маша родились в феврале
- Антон или Маша родились в феврале
- Все ученики сдали контрольную
- Некоторые студенты любят математику
- Каждый день идёт дождь
- Все кошки любят молоко
- Любое простое число больше 2 — нечётное
- Существует хотя бы одно решение уравнения для любого значения параметра

19.0.1 В компании из 13 человек хотя бы два родились в один месяц.

Решение: Пусть это не так. То есть никакие два человека не родились в один месяц. Тогда все 13 человек родились в разных месяцах. Но месяцев только 12 — противоречие.

19.0.2 34 пассажира едут в автобусе, который делает 9 остановок, причем на них никто не заходит. Докажите, что обязательно будут хотя бы 2 остановки, на которых вышло одинаковое количество пассажиров.

Решение: Пусть это не так. То есть нет 2 остановок, на которых вышло одинаковое число пассажиров. Тогда на всех остановках вышло разное количество людей. Значит, вышло не менее $0+1+2+3+4+5+6+7+8=36$ человек, а людей было всего 34. Получаем противоречие. Значит, хотя бы 2 такие остановки есть.

19.1 Докажите, что у 32 человек всегда найдутся двое, у которых день рождения в одно и то же число.

Решение: Пусть это не так. То есть, все 32 человека празднуют день рождения в разные числа. Но дней в месяце максимум 31. Противоречие. Значит, все-таки найдутся двое, у которых одинаковый день.

19.2 В картинной галерее 16 картин и 5 залов. Докажите, что в одном из залов висит не меньше 4 картин.

Решение: Предположим, что это не так. Значит, в каждом зале висит меньше 4 картин. Но тогда в каждом зале картин не больше 3, а во всех 5 залах картин не больше $3 \cdot 5 = 15$. Противоречие. Значит, хотя бы в одном зале висит 4 картины или больше.

19.3 Боря и Оля сидят за одной партой. Когда Боря готов к уроку он всегда поднимает руку.

- Оля на перемене поняла, что Боря опять ничего не выучил. "Значит, он не будет поднимать руку", - думает Оля. Верно ли она рассуждает?



- b. Учитель видит, что Боря не поднимает руку. “Ага, значит, он к уроку не готов. Вот сейчас вызову и двойку поставлю!” - подумал учитель. Верно ли он рассуждает?

Решение:

- a. Неверно, про Борино поведение при несделанных уроках никаких данных нет. Он мог, скажем, поднять руку, чтобы задать вопрос.
b. Верно. Это можно доказать от противного: если бы Боря был готов к уроку, он бы поднял руку.

- 19.4** Все 8 вершин кубика пронумерованы (от 1 до 8). Докажите, что можно найти ребро с разностью номеров не меньше 3.

Решение: Предположим противное: числа на концах любого ребра отличаются не более чем на 2. Рассмотрим вершину, в которой расположено число 1. В соседних с ней вершинах могут располагаться лишь 2 и 3. Но у каждой вершины куба есть три соседних. Полученное противоречие доказывает, что предположение неверно, и числа на концах хоть какого-нибудь ребра должны отличаться не менее чем на 3.

- 19.5** Семь гномов спят в круглой спальне. Каждый гном спит или на правом, или на левом боку. Докажите, что найдутся два гнома-соседа, спящих на левом боку, или два соседа, спящих на правом боку.

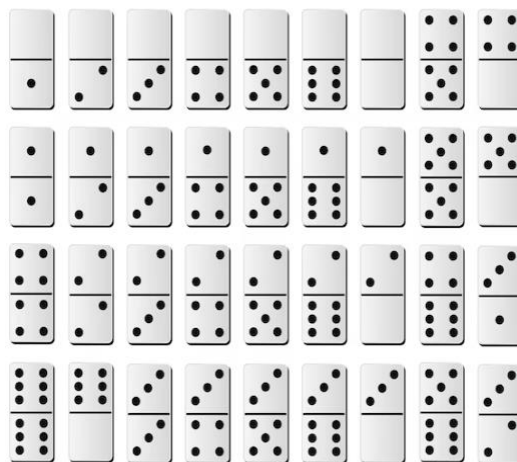
Решение: Пусть никакие два соседних гнома не лежат на одинаковом боку. Тогда гномы чередуются через одного - левый бок, правый бок, левый бок, правый бок. Допустим, что четные гномы лежат на левом боку, а нечетные - на правом. Тогда гномы №1 и №7 лежат на правом боку - противоречие, так как они соседние, а по предположению они должны спать на разных боках. Значит, существует два гнома-соседа лежащих на одинаковом боку.

- 19.6** Чип и Дейл разделили собранный урожай из 23 яблок на 7 мешков. Гаечка хочет взять в экспедицию не меньше 10 яблок. Докажите, что ей достаточно взять три мешка.

Решение: Предположим противное. Пусть нельзя выбрать 3 мешка, соответствующих условию задачи. То есть в любых 3 мешках в сумме должно быть не более 9 яблок. Тогда в 6 мешках в сумме должно быть не более 18 яблок, а так как всего их 23, то у оставшегося седьмого человека должно быть минимум 5 яблок. Поскольку это можно сказать обо всех шестерках мешков, то в каждом мешке минимум 5 яблок. Но тогда всего яблок было бы не меньше $7 * 5 = 35$, а их 23. Получаем противоречие. Значит, такие мешки выбрать можно.

- 19.7** 10 разработчиков пишут код. Известно, что каждый из них списал часть у пятерых. Докажите, что найдутся два разработчика, которые списали друг у друга.

Решение: Предположим, что это не так, то есть не существует пары разработчиков, которые списали друг у друга. Каждый из разработчиков списал у пятерых, следовательно, у него могли списать не более четырех разработчиков (тех, у которых он не списывал). Значит, количество списавших разработчиков не больше чем $4 * 10 = 40$ с одной стороны, в то время как с другой стороны списало $5 * 10 = 50$ разработчиков. Противоречие.



- 19.8** Из набора домино выбросили все кости с шестёрками.

Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд? (по правилам домино, смежные ячейки одинаковые)

Решение: Предположим, что нам это удалось. Теперь пятерка встречается 7 раз. Внутри цепочки она встречается чётное число раз. Значит, на одном из концов – пятерка. Аналогично можно доказать, что на концах находятся и все остальные "знаки" домино. Но знаков шесть, а концов всего два. Противоречие.

- 19.9** На шахматной доске стоят 44 ферзя. Докажите, что каждый из них бьёт какого-нибудь другого ферзя.

Решение: Пусть это не так. То есть какой-нибудь ферзь никого не бьет. Тогда есть 7 клеток, которые с ним в одной вертикали, 7 клеток, которые с ним в одной горизонтали и не менее 7 клеток, которые в одной диагонали. То есть если ферзь никого не бьет, то найдётся как минимум 21 свободная клетка. Но тогда всего клеток не менее $21 + 44 = 65$, а на шахматной доске их только 64. Получаем противоречие. Значит, каждый ферзь кого-то бьет.

- 19.10** Для обороны Изумрудного Города от менвитов защитники выстроились перед городской стеной в одну длинную шеренгу. В шеренге было 1014 деревянных солдат, 1013 жителей города и трое путешественников (Энни, Тим и Альфред). Известно, что никакие два деревянных солдата, жителя города или путешественника не стоят рядом. Докажите, что рядом хотя бы с одним путешественником будет стоять житель.

Решение: Предположим обратное, то есть не найдется житель, стоящий рядом с путешественником. Так как по условию никакие два защитника одного типа не стоят рядом, и мы предположили, что никакой из жителей не стоит с путешественником, то можем объединить этих двух защитников в один тип (например, “путешитель”) такой, что никакие два защитника этого типа не будут стоять рядом. $1013 + 3 = 1016$ (защитников) типа

“путешитель”. Так как всего 1016 защитников “путешителей”, то между ними можно поставить как минимум 1015 солдат (так как между 1016 “путешителями” 1015 промежутков). А у нас всего 1014 солдат, этого количества не хватает, чтобы заполнить все 1015 промежутков ($1014 < 1015$). Получили противоречие с предположением, что не найдется житель, стоящий рядом с путешественником. Следовательно, найдется житель, стоящий рядом с путешественником. Важный нюанс: требуется доказать, что при любой расстановке выполняется данное условие, а не для какого-то конкретного примера. Вдруг это плохой пример, и найдется такая расстановка, что это условие будет выполнено.

19.11 Узлы квадратной сетки покрашены в два цвета. Докажите, что найдётся прямоугольный треугольник с одноцветными вершинами.

Решение:

Предположим противное, то есть нет одноцветных прямоугольных треугольников.

Пусть клетка = узел, а ее цвет = цвет узла. Рассмотрим прямоугольный элемент сетки 2 на 3. Пусть два узла 1 и 4 одного цвета:

1	2	3
4	5	6

Тогда обязательно узлы 5 и 6 другого цвета:

1	2	3
4	5	6

Так как иначе прямоугольные треугольники 1-4-5 и 1-4-6 будут одноцветными.

Но тогда 2 не может быть оранжевой из-за треугольника 1-2-4, а также не может быть синим из-за треугольника 2-5-6. Значит, ситуации, где 1 и 4 одноцветные быть не может. Поскольку размеры сетки не заданы, любой паре соседних узлов можно сопоставить какую-то сетку 2 на 3 или 3 на 2 (аналогично), поэтому на самом деле мы доказали, что нет двух соседних вершин одного цвета.

Итак,

1	2	3
4	5	6

И единственно возможный вариант такой:

1	2	3
4	5	6

Однако в этом случае треугольник 1-5-3 является прямоугольным. Также противоречие. Значит, всегда найдется прямоугольный треугольник с одноцветными вершинами.