

Точного и общего определения для «принципа крайнего» или «принципа узких мест» не существует, но составить представление о том, что это такое можно.

Примеры:

“Где тонко, там и рвётся” – верёвка порвётся в том месте, где она истончилась, осталась одна ниточка из многих. Узкое место – как раз эта ниточка.

Подземные пещеры соединены разными проходами. Группа путешественников выбирает маршрут: длинный или короткий, но в коротком есть узкий лаз, через который не смогут пробраться все участники. Узкое место – не застрянет ли самый упитанный путешественник в этом лазу как Винни-Пух в норе Кролика?

“Узкое место” или “крайнее” – это особенное отличие, которое влияет на дальнейший ход событий. Если найти “узкое место” и понять, как оно влияет на задачу, то можно найти решение задачи. Основной принцип решения задач как раз и состоит в том, чтобы найти “узкое место” и начать “раскручивать” решение, построить логическую цепочку, которая приведёт к ответу. Обратите внимание в первую очередь на объекты «с краю» (геометрический смысл) или минимаксные (минимумы и максимумы, то есть арифметический смысл). Однако в некоторых задачах «крайний» элемент может иметь более нетривиальный смысл или вид.

Примеры идей «крайнего»: наибольшее или наименьшее число, наибольшую или наименьшую сторону или угол треугольника, наибольшее или наименьшее расстояние, пары наиболее удалённых точек и так далее.

18.0.1 Подумайте, по какому признаку можно выбрать «крайний» элемент в следующих множествах:

- | | |
|--|---|
| а) шары разного диаметра; | д) несколько месяцев в году; |
| б) несколько попарно различных (то есть в наборе нет двух одинаковых) натуральных чисел; | е) шкафы, отличающиеся по размеру и весу; |
| в) очередь желающих сдавать задачи на математическом кружке; | ж) все страны на Земле; |
| г) множество всех котиков на земле; | з) шашки, расположенные на доске 8x8. |

Решение: не составляет труда и оставляется для тренировки читателю.

18.0.2 В пустой комнате большой футбольный мяч гоняется за маленьким мячиком от настольного тенниса и хочет его раздавить. Как спастись маленькому мячику?

Ответ: Маленькому мячику надо закатиться в угол или просто как можно ближе к стене.

Решение: Поиск места, где мячику можно спрятаться, а это как раз места, где его не видят, не трогают относительно большого мяча. Маленькому мячику надо закатиться в угол или просто как можно ближе к стене. (очевидно, что диаметры стандартных теннисного и футбольного мяча подойдут)



18.1 На рынке продавались 6 мешков капусты с весами 15, 16, 18, 19, 20 и 21 кг. Первый покупатель купил 2 мешка капусты, а второй 3 мешка. Может ли такое быть, что второй купил в 2 раза больше капусты, чем первый?

Ответ: Не может.

Решение: Наименьшее возможное количество капусты, которое может купить первый покупатель $15+16=31$ кг. Наибольшее количество капусты, которое может купить второй покупатель - $19+20+21=60$. $31 > 60:2$

18.2 В деревне Разноростное (жителей в деревне хотя бы трое) нет двух жителей с одинаковым ростом.

- Однажды все жители этой деревни встали в круг, после чего каждый в круге сделал следующее заявление: «Мой сосед справа ниже меня!» Докажите, что хоть один соврал.
- Все жители вновь выстроились в круг, после чего каждый заявил: «Оба моих соседа ниже меня!» Докажите, что в этот раз хотя бы один из жителей сказал правду. Существенно ли в этой задаче условие на отсутствие двух жителей одинакового роста?
- Имярек из соседней деревни Многоростное попросил односельчан (заметьте, в этот раз мы не знаем, существуют ли в деревне Многоростное 2 жителя одинакового роста!) встать в круг. Сельчане выполнили просьбу, после чего каждый сельчанин заявил, что один его сосед был выше него, а другой сосед был ниже его. Докажите, что хотя бы двое сельчан соврали.

Решение:

- Обязательно есть человек самого низкого роста (так как людей конечное число). Он и соврал.

альтернативное решение (без принципа крайнего): для стоящих по кругу будет неравенство для ростов $a_1 < a_2 < \dots < a_n < a_1$. Противоречие.

б. Обязательно есть самый высокий человек. Он и сказал правду. Существенно, иначе могут стоять двое с одинаковым максимальным ростом рядом и тогда не будет человека, сказавшего правду, если, например, они расположены по убыванию роста в обе стороны от самых высоких до замыкания круга.

с. **Ответ:** Самый высокий и самый низкий соврали.

Доказательство: Рассмотрим 2 односельчан - самого высокого и самого низкого. Если рядом с высоким оба меньшего роста - он соврал. Аналогично, если даже рядом с ним стоит один или оба того же роста, он тоже соврал. Аналогично для самого низкого. Значит, они оба соврали.

- 18.3** Можно ли расположить числа от 1 до 10 (каждую ровно по одному разу) в такой последовательности, чтобы при сложении любых трёх соседних чисел получалась сумма не выше 15?

Ответ: Нет

Решение:

Подсказка. Посмотрите, что можно сказать о сумме первых (слева направо) девяти чисел. Каким может быть число с правого края?

Посмотрим, какие числа могут стоять по краям. Разобьем первые 9 чисел на три группы по три рядом стоящих числа. В каждой тройке чисел сумма по условию не более 15, значит сумма этих девяти чисел — не более 45. Общая сумма чисел от 1 до 10 равна 55. Значит, крайнее справа число — это $55 - 45 = 10$. Если пойдем не слева направо, а справа налево, то получится, что первое слева число тоже 10. Но этого не может быть, так как по условию мы каждое число используем один раз. Значит, расстановка невозможна.

- 18.4** На жердочке в ряд уселись шесть попугаев. Между Гошей и Кешей сидит Рома и ещё один попугай. Между Яшей и Ромой сидит Тиша и ещё один попугай. Между Тишей и Федей сидит Гоша и ещё один попугай. В каком порядке сидят попугаи, если Федя не сидит на краю?

Ответ: К Ф Р Г Т Я

Решение: Попробуем понять, кто сидит с краю. Если мы это узнаем, то решить задачу будет легче. Так как “между Гошей и Кешей сидит Рома и еще один попугай”, то Рома точно не с краю. Так как “между Яшей и Ромой сидит Тиша и еще один попугай”, то Тиша точно не с краю. Так как “между Тишей и Федей сидит Гоша и еще один попугай”, то Гоша тоже не с краю. Наконец, в условии написано, что “Федя не сидит на краю”. Всего попугаев шесть, про четырех точно известно, что они не с краю. Значит, с краю сидят оставшиеся два. Это только Кеша и Яша — они точно сидят с краю. Узкое место — сидящие с краю. Получим такую расстановку попугаев: К _ _ _ Я (может быть и наоборот — Я _ _ _ К, читай справа налево). Из условий следует, что между Кешей и Гошей два попугая, между Яшей и Ромой — тоже. Теперь мы точно знаем, где сидят Гоша и Рома: К _ Р Г _ Я. Где сидят оставшиеся попугаи, понять уже совсем просто, окончательно получается как К Ф Р Г Т Я.

- 18.5** В древнем царстве Тарния правил повелитель Ятнира, потомок великого императора Ятианра. Чтобы тарнийцы не могли строить козни, он придумал для них упрощенный язык. Его алфавит состоял всего из шести букв: А, И, Н, Р, Т, Я, но порядок их отличался от принятого в русском языке. Словами этого языка были все последовательности, использующие каждую из этих букв по одному разу. Ятнира издал полный словарь нового языка. В соответствии с алфавитом первым словом словаря оказалось «Тарния». Какое слово следовало в словаре за словом Ятианр?

Ответ: Ятиран.

Решение: В первом слове буквы расположены в алфавитном порядке: Т, А, Р, Н, И, Я. Для удобства занумеруем буквы в алфавитном порядке: Т = 1, А = 2, Р = 3, Н = 4, И = 5, Я = 6. Заменяем каждое слово соответствующим шестизначным числом. Если слова расположены по алфавиту, то числа — в порядке возрастания. Слово Ятианр запишется числом 615243. За ним следует 615324, что соответствует слову Ятиран.

18.6

- а. Возможно ли расставить натуральные числа от 1 до 9 и 10 в строчку так, чтобы в каждой паре соседних чисел они отличались бы друг от друга не менее, чем на 5?
- б. Возможно ли расставить все цифры, кроме 0, а также число 20 в ряд так, чтобы для любых соседей одно из чисел делилось на другое?

а.

Ответ: 5 10 4 9 3 8 2 7 1 6

Решение: Посмотрим какие соседи могут быть у каждого числа. Получится так:

1 — 6, 7, 8, 9, 10

2 — 7, 8, 9, 10

3 — 8, 9, 10

4 — 9, 10

5 — 10

6 — 1

7 — 1, 2

8 — 1, 2, 3

9 — 1, 2, 3, 4
10 — 1, 2, 3, 4, 5.

Видно, что у числа 5 и 6 меньше всего «свободы» в выборе соседних чисел — рядом с каждым из них может стоять только одно число. Это «узкое место». У каждого числа, которое стоит не с краю, два соседа (слева и справа) — ограничений вдвое больше, чем у стоящих с краю. Это означает, что 5 и 6 должны стоять по краям. При этом рядом с 5 стоит единственный возможный сосед — 10, а рядом с 6 — 1. Значит, нашу расстановку мы уже начинаем так: 5 10 _ _ _ _ _ 1 6 (или же наоборот — 6 — крайняя слева, 5 — крайняя справа). С числами 5, 10, 6 и 1 мы разобрались. У 4 может быть только 2 соседа — 9 и 10. Так как она не с краю, она обязательно рядом с 10, а затем идет 9: 5 10 4 9 _ _ _ _ _ 1 6. Аналогично для 7: 5 10 4 9 _ _ 2 7 1 6. Остались 3 и 8. Очевидно, что расположение такое: 5 10 4 9 3 8 2 7 1 6.

б.

Ответ: 7 1 9 3 6 2 8 4 20 5 или 7 1 5 20 4 8 2 6 3 9

Решение:

Выпишем для каждого числа те, которые могут стоять рядом с ним:

1 — 2 3 4 5 6 7 8 9 20
2 — 1 4 6 8 20
3 — 1 6 9
4 — 1 2 8 20
5 — 1 20
6 — 1 2 3
7 — 1
8 — 1 2 4
9 — 1 3
20 — 1 2 4 5

Первое «узкое место» — число 7. У него только один сосед — 1:

7 1 _ _ _ _ _

Следующее «узкое место» — 5. Если 5 поставить рядом с 1, то 20 обязательно справа, а у 9 останется только 3 и 9 обязательно с краю:

7 1 5 20 _ _ _ _ 3 9

Дальше рядом с 3 остается только один вариант — 6:

7 1 5 20 _ _ _ 6 3 9

С 6 — только 2:

7 1 5 20 _ _ 2 6 3 9

Остались только 4 и 8, поэтому расстановка однозначна:

7 1 5 20 4 8 2 6 3 9

2 вариант: Если 5 поставить с краю:

7 1 _ _ _ _ _ 20 5

Очередное «узкое место» — это 9. Рядом с 9 может быть только 1 или 3. Так как края уже заняты, очевидно:

7 1 9 3 _ _ _ _ 20 5

Рядом с 3 — осталось только 6:

7 1 9 3 6 _ _ _ 20 5

Рядом с 6 — только 2:

7 1 9 3 6 2 _ _ 20 5

8 и 4 добавляются однозначно:

7 1 9 3 6 2 8 4 20 5

18.7 Вдоль фонтана МГУ по прямой растёт четыре дерева. Известны пять из шести попарных расстояний между ними: 2 м, 2 м, 3 м, 4 м, 5 м. Найдите оставшееся шестое расстояние.

Ответ: 1 м или 7 м.

Решение: *Первый случай.* Наибольшее расстояние (крайнее место) между двумя деревьями может быть равно 5 м, и тогда шестое расстояние равно $5 - 4 = 1$ м (недостающая разность). В итоге, расстояния между соседними деревьями следующие: 1 м, 2 м, 2 м.

$* 1 * 2 * 2 * = * 2 * 2 * 1 *$

Второй случай. Наибольшее расстояние между двумя деревьями может быть как раз шестым (то, которое надо найти). В этом случае между деревьями с расстоянием 5 м растёт только одно дерево на расстояниях 3 м и 2 м (мельче расстояний нет, поэтому только одно), и тогда шестое расстояние $5 + 2 = 7$ м. В итоге, расстояния между ближайшими деревьями: 3 м, 2 м, 2 м.

$* _ * _ * _ *$

$* 3 * 2 * 2 *$

18.8 На доске были записаны четыре натуральных числа. Сложив их всевозможными различными способами по два, Петя получил следующие шесть сумм: 17, 18, 20, 21, 23, 26. Докажите, что Петя ошибся при исчислении сумм.

Решение: *Первый способ (без принципа крайнего).* Сумма всех шести попарных сумм равна 125. Каждое из записанных на доске чисел входит в эту сумму три раза, значит, эта сумма должна быть кратна 3, но 125 на 3 не делится (поскольку числа целые).

Второй способ (принцип крайнего). Расположим записанные числа в порядке неубывания: $a \leq b \leq c \leq d$. Далее мы рассматриваем крайние суммы (2 от минимума и 2 от максимума). Тогда $a+b=17$, $a+c=18$, $b+d=23$, $c+d=26$. Отсюда получаем, что $41=18+23=a+b+c+d=17+26=43$. Таких чисел не существует. Значит, была ошибка в вычислениях.

18.9 Полина, Галина, Марина, Ирина, Фаина, Янина и Кристина стоят по кругу так, что все семь расстояний между соседними девочками различны. Учитель попросил каждую назвать имя той из двух соседних с ней девочек, которая стоит ближе к ней. Могут ли в ответ на просьбу учителя быть названы имена всех девочек?

Ответ: Нет.

Решение: Предположим, что названы имена всех девочек. Так как все расстояния различны, то есть наименьшее (то самое, крайнее). Значит, соответствующая пара девочек называет имена друг друга. Их имена никто назвать уже не может. Поэтому среди оставшихся расстояний наименьшее реализуется на другой паре девочек. Таким образом, все девочки разбиваются на пары. Но их нечётное число. Противоречие.

18.10

- Восемь гриффиндорцев собрали 37 конфет “Берти Боттс”. Известно, что никакие двое не собрали конфет поровну и каждый нашел хотя бы одну конфету. Докажите, что какие-то двое из них собрали больше, чем какие-то пятеро.
- В Запретный лес собирать целебные корни отправили четырех гриффиндорцев и трех слизеринцев. Всего они собрали 70 корней. Никакие два слизеринца не собрали поровну, а любые трое гриффиндорцев принесли вместе не менее 43 корней. У любых двоих учеников число собранных корней отличалось не более чем в 5 раз. Малфой собрал больше всех из слизеринцев. Сколько он принес корней?

Решение:

a.

Подсказка. Посмотрите — а сколько, самое меньшее, мог набрать тот, кто собрал больше всех? А занявший второе место по количеству?

Пронумеруем гриффиндорцев числами от 1 до 8, по убыванию количества конфет, которые они собрали. Заметим, что первый не мог набрать менее 9 конфет, т.к. тогда бы все вместе набрали максимум $1+2+3+4+5+6+7+8=36 < 37$ конфет. Последний нашел хотя бы 1 конфету, предпоследний — хотя бы 2 и так далее. Значит, второй нашел хотя бы 7 конфет. Значит, первый и второй вместе набрали хотя бы $7+9=16$ конфет. Третий набрал не менее шести конфет по той же причине, почему второй — не менее семи. Значит, 4-й, 5-й, ...8-й набрали вместе максимум $37-16-6=15 < 16$ конфет. Значит, первый и второй собрали больше, чем гриффиндорцы с номерами 4, 5, 6, 7 и 8.

b.

Ответ: 5 корней.

Решение: Любые трое гриффиндорцев принесли вместе не менее 43 корней, поэтому есть гриффиндорец, собравший не менее 15 корней (так как $14 \cdot 3 = 42 < 43$). Значит, этот гриффиндорец и остальные трое собрали не менее $15 + 43 = 58$ штук. $70 - 58 = 12$ корней - не более 12 корней собрали слизеринцы.

Если есть гриффиндорец, собравший не менее 15 штук, то любой слизеринец собрал не менее $15 : 5 = 3$ корней. Слизеринцы собрали разное число корней, то есть вместе не менее $3 + 4 + 5 = 12$ штук.

Так как $58 + 12 = 70$ — все собранные корни, значит слизеринцы собрали 3, 4 и 5 корней, Малфой принес 5 штук.

18.11 Гермiona в течение 10 дней разучивала заклинания — каждый день хотя бы одно. Каждый день (кроме первого), если погода была пасмурная, то она разучивала на одно заклинание больше, чем в предыдущий день, а если солнечная — на одно заклинание меньше. За первые 9 дней Гермiona выучила 13 заклинаний. Какая погода была на десятый день?

Ответ: Пасмурная.

Решение: Рассмотрим любые два дня, идущие подряд. Каждый день выучено хотя бы по одному заклинанию, но ровно по одному оба дня быть не может, значит, за эти два дня выучено как минимум три заклинания. Таким образом, за первые 8 дней Гермiona выучила как минимум $4 \cdot 3 = 12$ заклинаний. Если бы она за девятый день выучила хотя бы два заклинания, то число выученных за 9 дней заклинаний превысило бы 13. Так что за 9-й день было выучено ровно одно заклинание. На 10-й день погода была пасмурной (и Гермiona выучила два заклинания), в противном случае она бы выучила в этот день 0 заклинаний, а по условию это не так.

Можно привести пример, как такое могло быть: Гермiona за эти 10 дней последовательно учила 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2, 1, 2 заклинаний. Нетрудно доказать, что этот пример единственен. В самом деле, доказательство, что Гермiona выучила за 9-й день ровно одно заклинание, применимо к любому нечётному дню.