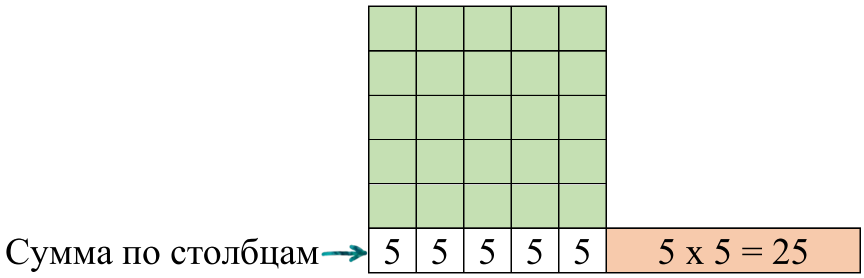
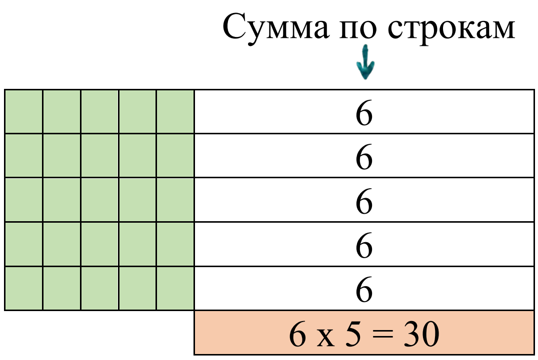
Можно ли таблицу 5×5 заполнить числами так, чтобы сумма чисел в каждом столбце равнялась пяти, а в каждой строчке — шести?

Решение: представим, что можно. Тогда, если в каждом из 5 столбцов сумма чисел равна 5, то сумма чисел во всей таблице будет равна 5 x 5 = 25:



Теперь посчитаем эти же числа в этой же таблице построчно. По условию сумма чисел в каждой из пяти строк должна быть равна 6, тогда сумма всех чисел по всем пяти строкам должна быть равна 6 x 5 = 30:



Складывали одни и те же числа таблицы: сначала по столбцам и получили 25, затем по строкам и получили 30, возникает противоречие – не могут одни и те же числа давать в сумме разные значения, следовательно, нельзя таблицу 5×5 заполнить числами так, чтобы сумма чисел в каждом столбце равнялась пяти, а в каждой строчке — шести.

1. Можно ли таблицу 20×22 заполнить числами так, чтобы сумма чисел в каждом столбце равнялась десяти, а в каждой строчке – девяти?

Ответ: нельзя.
Решение: сумма чисел в таблице по столбцам равна 10 x *20=200, а по строкам должна быть равна 9* x *22=198, следовательно, нельзя.*

2. В некоторые клетки доски 7×23 поставили фишки так, что во всех столбцах фишек поровну и во всех строках фишек поровну. Верно ли, что фишками заполнили всю доску? Если нет, то сколько фишек могли поставить на доску?

Ответ: да.

Решение: пусть в 7 столбцах по t фишек, тогда во всей таблице 7 х *t фишек. Пусть в строках по f фишек, тогда количество фишек по строкам равно 23* х *f, следовательно, число 7* х *t=23* х *f и количество фишек не больше 7* х *23. Так как 7 и 23 взаимно простые числа (у них нет никаких общих делителей, кроме 1), то единственно возможным решением является 7* х *23=23* х *7, значит, фишками должно быть заполнено всё поле.*

3. А если теперь взять доску 19×95 и поставить фишки так, что во всех столбцах фишек поровну и во всех строках фишек поровну. Верно ли, что фишками заполнили всю доску? Если нет, то сколько фишек могли поставить на доску?

Ответ: не обязательно. В каждом столбце может стоять кратное 5 количество фишек, но не более 95, а именно: 5, 10, 15, 20, …, 95.

Решение: пусть в каждом из 19 столбцов стоит по m фишек, тогда всего фишек в таблице 19 х *m. Пусть в каждой из 95 строк стоит по n фишек, тогда всего фишек в таблице 95* х *n. При этом 19* х *m=95* х *n, или 19* х *m=(19* х *5)* х *n, или m=5* х *n, следовательно, в каждом столбце может стоять кратное 5 количество фишек, но не более 95, а именно: 5, 10, 15, 20, …, 95.*

4. Коля, Толя и Денис ели пончики. Они утверждают следующее:
   Коля: «Я и Толя съели 15 пончиков».
   Толя: «Денис и Коля съели 6 пончиков».
   Денис: «Я и Толя съели 13 пончиков».
   Могло ли такое быть? Если да, найдите кто сколько пончиков съел, если нет, объясните почему.

Ответ: да, могло. Коля – 4, Толя – 11, Денис – 2.

Решение: К + Т = 15, Д + К = 6, Д + Т = 13. Если всё сложить, получим 2К +2Т +2Д = 34. Отсюда К + Т + Д = 17. Дальше легко найти, что Коля – 4, Толя – 11, Денис – 2.

5. Аня, Боря и Ваня разводят хомячков. Они утверждают следующее:
   Аня: «У Бори и Вани – 7 хомячков».
   Боря: «У Вани и Ани – 13 хомячков».
   Ваня: «У Ани и Бори – 4 хомячка».
   Послушав это, Гена усомнился в правдивости этих слов. Есть ли основания для сомнений?

Ответ: да, есть.

Решение: у Вани и Ани всего 13 хомячков, значит, у кого-то из них больше хомячков, чем у остальных ребят. Если у Бори и Вани всего 7 хомячков, пусть у Вани будет максимально возможное количество – 7, тогда у Ани должно быть 13 – 7 = 6 хомячков.

А согласно третьему высказыванию, у Ани и Бори 4 хомячка, что уже меньше 6. Такого быть не может.

6. Катя, Саша и Варя играли в настольную игру. Та из девочек, что наберет за игру больше всех очков, получает четыре победные фишки, второе место – две фишки, а третье место – только одну фишку. По итогам игр девочки посчитали фишки, у каждой оказалось по 20, причём одинаковое количество очков никто из девочек не набирал ни на одной игре. Правильно ли девочки посчитали свои фишки? Почему?

Ответ: нет, количество фишек, полученных всеми девочками, должно делиться на количество фишек, получаемых за одну игру, т.е. должно быть кратно 7.
Решение: если за каждую игру все три девочки вместе получали 7 фишек (первая – 4, вторая – 2, третья – 1 фишку), значит, количество всех полученных ими фишек должно обязательно делиться на 7, но 60 на 7 не делится. Следовательно, кто-то ошибся при подсчете фишек.

7. На балу каждая дама танцевала с 6 кавалерами, а каждый кавалер с 5 дамами.

   а) Если дам было 20, то сколько было кавалеров?

   б) Могло ли кавалеров быть больше, чем дам?

   в) Могло ли на балу быть ровно 38 дам?

   г) Могло ли на балу быть ровно 98 человек?

Решение. Поставим кавалеров у одной стены, а дам – у другой. Принесём много верёвочек, и натянем верёвку между дамой и кавалером, если они танцевали вместе. Тогда у каждой дамы будет в руке 6 верёвочек.

а) Если дам 20, то всего они держат в руках $20\times6 = 120$ верёвочек. Но каждая верёвочка идёт от дамы к кавалеру, а значит, верёвочек, которые держат в руках кавалеры, тоже будет 120. При этом у каждого кавалера в руке 5 верёвочек, так как каждый танцевал только с 5 дамами. Значит кавалеров на балу было $120:5 = 24$.

б) Пусть количество дам равно D. Тогда они держат в руках $D\times6$ верёвочек, а кавалеры держат в руках $K\times5$ верёвочек. Но количество верёвок, которые держат кавалеры, равно количеству верёвок, которые держат дамы, поэтому $D\times6 = K\times5$. $K = D\times6 :5$. Значит, кавалеров больше, чем дам.

в) $D\times6 = K\times5$, а значит количество кавалеров делится на 6, а количество дам делится на 5, и дам не могло быть 38.

г) Раз количество дам делится на 5 обозначим $D = X\times5$. Получим, что $X\times5\times6 = K\times5$. То есть $K=X\times6$. А значит всего людей на балу было $D+K = X\times5+ X\times6 = X\times11$. Но 98 не делится на 11. Значит на балу не могло быть 98 человек.