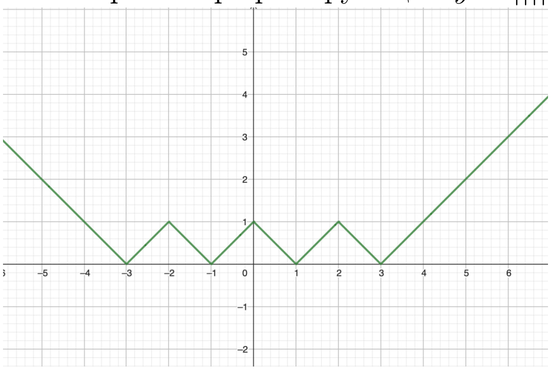
Малый мехмат МГУ

Вступительная работа 2024/2025 учебного года

9—11 класс, дополнительный набор 08.02.2025. Все задачи и решения

---

1. **Условие.** Пусть x_1 и x_2 — корни уравнения $\sqrt{2}x^2 - 4\sqrt{3}x - 10 = 0$. Чему равно $x_1^3 + x_2^3$?
Ответ: $48\sqrt{6} + 60\sqrt{3}$.
Решение. По теореме Виета $x_1 + x_2 = 2\sqrt{6}$, $x_1 \cdot x_2 = -5\sqrt{2}$. Тогда
$$x_1^3 + x_2^3 = (x_1 + x_2)\left((x_1 + x_2)^2 - 3x_1x_2\right) = 2\sqrt{6}\left((2\sqrt{6})^2 - 3(-5\sqrt{2})\right) = 48\sqrt{6} + 60\sqrt{3}.$$

2. **Условие.** Постройте график функции $y = ||||x| - 1| - 1| - 1|$.
Ответ: 
Решение. Построим график $y = |x|$. Затем построим $y = |x| - 1$. Для этого достаточно опустить график $y = |x|$ на единицу вниз. Теперь построим график $y = ||x| - 1|$. Для этого нужно отразить часть графика $y = |x| - 1$, лежащую под осью абсцисс, наверх. Далее действуем аналогично.

3. **Условие.** Дан квадрат $ABCD$ со стороной 1. Точки E и F — середины сторон AB и CD соответственно. Обозначим за G пересечение отрезков AC и EF и за H пересечение отрезков AC и ED. Найдите площадь треугольника EGH.
Ответ: $\frac{1}{24}$.
Решение. Треугольник AHD подобен треугольнику GHE, поэтому
$$\frac{AH}{GH} = \frac{AD}{EG} = 2.$$
Замечая, что площадь треугольника AEG равна $\dfrac{1}{8}$, получаем
$$S_{EGH} = \frac{1}{3}S_{AEG} = \frac{1}{24}.$$

4. **Условие.** Решите систему уравнений:
$$\begin{cases} \dfrac{y - x + 1}{x^2 - 3x} = 1, \\ y^2 + 5 + 2xy = 6y + 6x - x^2. \end{cases}$$
Ответ: $(-1; 2)$, $(2; -1)$, $(-2; 7)$.
Решение. Преобразуем второе уравнение: $(x + y - 5)(x + y - 1) = 0$. Дальше разбираем два случая: $x + y = 5$ и $x + y = 1$. Дорешиваем с помощью подстановки.

5. **Условие.** Решите уравнение: $\sqrt{3x^2 - 3x - 11} = \sqrt{2x^2 - 4x - 5}$.
Ответ: -3.
Решение. Данное уравнение равносильно системе
$$\begin{cases} 3x^2 - 3x - 11 = 2x^2 - 4x - 5, \\ 2x^2 - 4x - 5 \geqslant 0, \end{cases}$$

которая, в свою очередь, преобразуется к системе

$$\begin{cases} (x+3)(x-2)=0, \\ 2x^2-4x-5 \geqslant 0. \end{cases}$$

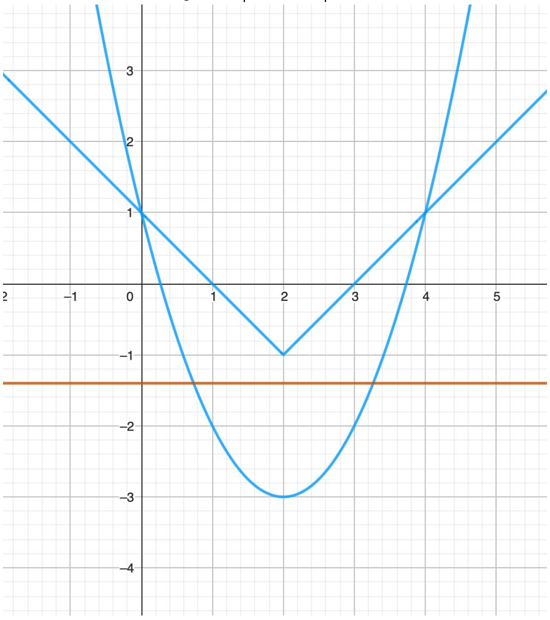
6. **Условие.** Найдите все значения параметра a, при которых уравнение

$$(a+4x-x^2-1)(a+1-|x-2|)=0$$

имеет ровно три корня.

Ответ. -1.

Решение. Число решений уравнения совпадает с числом пересечений графика $y=a$ с графиками $y=x^2-4x+1$ и $y=|x-2|-1$.



Комментарии.