

В конце концов, если нас обвинят в снобизме, пусть их. Всё равно нас в чём-нибудь обвинят.

Иосиф Бродский

2.1. При каких целых n число $n^4 + 4$ — составное?

2.2. Докажите, что при натуральных $m \neq n$ выполняются равенства:

а) $\text{НОД}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{НОД}(m,n)} - 1, \quad a > 1;$

б) $\text{НОД}(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1.$

2.3. Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей.

2.4. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$. Докажите, что уравнение $ax + by = 1$ имеет хотя бы одно целочисленное решение.

2.5. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$ и (x_0, y_0) — некоторое целочисленное решение уравнения $ax + by = 1$. Докажите, что все решения этого уравнения в целых числах получаются по формулам $x = x_0 + kb, y = y_0 - ka$, где k — произвольное целое число.

2.6. Как описать все решения в целых числах уравнения $ax + by = c$ при произвольных a, b, c ?

2.7. Докажите, что для любого простого числа $p > 2$ числитель дроби

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

делится на p .

2.8. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестной подставить 2 или 3, то получаются числа, делящиеся на 6. Докажите, что если вместо неизвестной в него подставить 5, то также получится число, делящееся на 6

2.9. Докажите, что среди любых десяти последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.

В конце концов, если нас обвинят в снобизме, пусть их. Всё равно нас в чём-нибудь обвинят.

Иосиф Бродский

2.1. При каких целых n число $n^4 + 4$ — составное?

2.2. Докажите, что при натуральных $m \neq n$ выполняются равенства:

а) $\text{НОД}(a^m - 1, a^n - 1) = a^{\text{НОД}(m, n)} - 1, \quad a > 1;$

б) $\text{НОД}(2^{2^m} + 1, 2^{2^n} + 1) = 1.$

2.3. Докажите, что число $2^{2^n} - 1$ имеет по крайней мере n различных простых делителей.

2.4. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$. Докажите, что уравнение $ax + by = 1$ имеет хотя бы одно целочисленное решение.

2.5. Пусть $\text{НОД}(a, b) = 1$ и (x_0, y_0) — некоторое целочисленное решение уравнения $ax + by = 1$. Докажите, что все решения этого уравнения в целых числах получаются по формулам $x = x_0 + kb, y = y_0 - ka$, где k — произвольное целое число.

2.6. Как описать все решения в целых числах уравнения $ax + by = c$ при произвольных a, b, c ?

2.7. Докажите, что для любого простого числа $p > 2$ числитель дроби

$$\frac{m}{n} = \frac{1}{1} + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{p-1}$$

делится на p .

2.8. Дан многочлен с целыми коэффициентами. Если в него вместо неизвестной подставить 2 или 3, то получаются числа, делящиеся на 6. Докажите, что если вместо неизвестной в него подставить 5, то также получится число, делящееся на 6

2.9. Докажите, что среди любых десяти последовательных натуральных чисел найдется число, взаимно простое с остальными.