Избранные задания олимпиад и вступительных испытаний в МГУ имени М. В. Ломоносова в 2010–2011 гг.

Ежегодно в Московском университете проводится множество интеллектуальных состязаний для школьников: олимпиады «Ломоносов», «Покори Воробьёвы горы», турнир имени М. В. Ломоносова и многие другие. Информацию об этих мероприятиях можно узнать на официальном сайте http://www.msu.ru в разделе «Поступающим».

В 2010–2011 гг. на механико-математическом и ряде других факультетов МГУ проводились вступительные экзамены — дополнительные по отношению к ЕГЭ вступительные испытания в письменной форме.

Далее приводятся избранные задания олимпиад и вступительных испытаний 2010–2011 гг.

1. Вычислите значение функции $x^2 - 0{,}625x - \frac{1}{8}$ в точке $x = \frac{5}{8}$.

2. Решите неравенство
$$\frac{x+7}{x+1} \leqslant x+3.$$

3. Между пунктами А и Б, расположенными на берегу озера, курсирует катер. На сколько процентов увеличится время в пути из пункта А в пункт Б, если скорость катера уменьшится на 20%?

4. Решите уравнение $(\sin x + \cos x)^2 = 1$.

5. Стороны треугольника равны 3, 5, 7. Найдите величину большего из углов треугольника.

6. Решите неравенство $2 \cdot 3^x + 3^{1-x} \leqslant 7$.

7. Параллелограмм, одна из сторон которого равна 3, описан вокруг окружности радиуса 1. Найдите площадь параллелограмма.

8. Решите уравнение $3\log_8(x+1) = \log_2\sqrt{2x+5}$.

9. Решите систему уравнений
$$\begin{cases} 3x^y &= 4^x + 8, \\ y &= \dfrac{x+1}{\log_2 x}. \end{cases}$$

10. Решите неравенство $(\sqrt{3}-\sqrt{2})^{(\log_2 3)^{4-x^2}} \leqslant (\sqrt{3}+\sqrt{2})^{-(\log_3 2)^{2x-1}}$.

11. На основании AC равнобедренного треугольника ABC взята точка E, а на боковых сторонах AB и BC точки D и F соответственно так, что $DE \parallel BC$ и $EF \parallel AB$. Какую часть площади треугольника ABC занимает площадь треугольника DEF, если $BF : EF = 2 : 3$?

12. Два вкладчика вложили деньги в общее дело. После этого один из них добавил еще 1 млн р., в результате чего его доля в общем деле увеличилась на 0,04, а когда он добавил еще 1 млн р., его доля увеличилась еще на 0,02. Сколько денег ему нужно добавить еще, чтобы увеличить свою долю еще на 0,04?

13. Решите уравнение $2\sin^4 x + 7\cos^3 x = 2$.

14. Даны две окружности радиусов 2 и 3. Прямая касается обеих окружностей и пересекает отрезок, соединяющий их центры. Найдите расстояние между точками касания, если расстояние между центрами равно 7.

15. Найдите наименьшее положительное значение функции $f(x) = 4(3\cos^2 x + 2\sin x - 1)^{-1}$.

16. Решите неравенство
$$\frac{1}{\sqrt{-x-2}} - \frac{1}{\sqrt{x+4}} \leqslant 1 + \frac{1}{\sqrt{(x+4)(-x-2)}}.$$

17. Решите неравенство
$$\frac{1-x}{x} > \sqrt{\frac{3x-2}{3x+4}}.$$

18. Студент Василий добирался от железнодорожной станции до деревни Бабушкино. Он ехал на автобусе до посёлка Дедушкино, где встретил знакомого, который за 10 минут подвёз его до деревни на своей машине. Машина ехала в полтора раза быстрее автобуса. Когда пришло время уезжать, Василий за час доехал на велосипеде до посёлка Дедушкино, а оттуда на такси доехал до станции. Такси ехало в 6 раз быстрее велосипеда, и в итоге Василий на обратную дорогу от деревни до станции потратил ровно столько же времени, сколько потребовалось, чтобы добраться от станции до деревни. Сколько времени ушло у Василия на дорогу в один конец?

19. Медианы AL и BM треугольника ABC пересекаются в точке K. Найдите длину отрезка CK, если $AB = \sqrt{3}$ и известно, что вокруг четырёхугольника $KLCM$ можно описать окружность.

20. Числа 54 и 128 являются членами геометрической прогрессии. Найдите все натуральные числа, которые могут встретиться в этой прогрессии.

21. Проекции некоторой кривой в координатном пространстве на плоскости Oxz и Oyz удовлетворяют уравнениям $5x + \cos z = 0$ и $z = \operatorname{arctg}\sqrt{y-3}$ соответственно. Найдите функцию $y = f(x)$, график которой состоит из тех и только тех точек, которые могли бы при этих условиях служить проекциями точек той же кривой на плоскость Oxy.

22. Найдите площадь треугольника ABC, если известно, что $\angle ABC = \frac{\pi}{12}$, $BC = 5$, $2AC > AB$, медиана CD образует со стороной AC треугольника угол величиной $\frac{5\pi}{12}$.

23. Из лесу выскочил заяц и помчался по прямой в направлении тернового куста. На полпути до куста заяц напоролся на колючку и стал бежать в полтора раза медленнее. Когда зайцу оставалось до куста 50 метров, из лесу (из того же места) выбежал волк и погнался за зайцем. Когда заяц добежал до куста, волку оставалось до него 10 метров. На каком расстоянии от леса находится терновый куст, если известно, что волк всё время бежал со скоростью, с которой первоначально бежал заяц?

24. Найдите все значения a, при каждом из которых система

$$\begin{cases} 25^x - 13 \cdot 5^x + a < 0, \\ 12\sin^4 \pi x - \cos 4\pi x = 11 \end{cases}$$

имеет хотя бы одно решение.

25. В основании правильной пирамиды $SABCD$ лежит квадрат $ABCD$ со стороной 6. Через середины ребер AD, BC и CS проведена плоскость. Найдите периметр сечения пирамиды этой плоскостью, если длины боковых ребер пирамиды равны 7.

26. На ребре AS треугольной пирамиды $SABC$ отмечены такие точки M и N, что $AM = MN = NS$. Найдите площадь треугольника NBC, если площади треугольников ABC, MBC и SBC равны 1, 2 и $\sqrt{37}$ соответственно.

27. На доске написан квадратный трехчлен $x^2 + 9x + 47$. Таня (по своему усмотрению) увеличивает или уменьшает на 1 коэффициент при x, после чего Ваня увеличивает или уменьшает на фиксированное число m свободный член, а далее эти действия повторяются. Как только написанный на доске многочлен имеет целый корень, Ваня получает оценку «пять». Может ли он обеспечить себе «пятерку» при любых действиях Тани, если а) $m = 2$; б) $m = 3$?

28. Найдите все натуральные числа x и y, удовлетворяющие уравнению $y^3 = x^3 + 9x^2 + 17$.

29. В основании параллелепипеда лежит прямоугольник $ABCD$ со сторонами $AB = 1$ и $BC = 4$, боковые ребра AA_1, BB_1, CC_1, DD_1 перпендикулярны основанию и равны 1. Сфера касается прямой DC_1 в точке C_1, прямой DB_1 в точке, лежащей внутри отрезка DB_1, и проходит через точку D_1. Найдите радиус сферы.

30. Диагонали трапеции $ABCD$ с основаниями $AD = 3$ и $BC = 1$ пересекаются в точке O. Две окружности, пересекающие основание BC в точках K и L соответственно, касаются друг друга в точке O, а прямой AD — в точках A и D соответственно. Найдите $AK^2 + DL^2$.