Московский государственный университет
имени М. В. Ломоносова

Механико-математический факультет

А. Л. Канунников

Уравнения и неравенства

Методическая разработка для учащихся
заочного отделения Малого механико-математического факультета

Москва, 2008

Канунников Андрей Леонидович. Уравнения и неравенства: Методическая разработка для учащихся заочного отделения Малого механико-математического факультета — М.: Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ, 2008 — 64 с., илл.

В брошюре излагаются основные методы решения уравнений и неравенств, разбираются примеры и анализируются некоторые типичные ошибки школьников и абитуриентов. Многие решения подробно прокомментированы.

Рецензент
доктор физико-математических наук, профессор И. Н. Сергеев

Редактор С. Л. Кузнецов
Технический редактор С. Л. Кузнецов

Как пользоваться брошюрой

После ознакомления с теоретической частью, помещённой в преамбуле каждого параграфа, и разбора демонстрационных примеров, приступайте к решению обязательных задач (они отмечены галочками). Остальные задачи решать не надо. Они становятся обязательными в случае получения неудовлетворительной оценки. Впрочем, если обязательные задачи у Вас получаются с трудом, мы рекомендуем для закрепления материала порешать близкие задачи из числа необязательных, но высылать их решения не нужно.

Возле номера некоторых задач указана их степень трудности (относительно задач того же параграфа):
$^\circ$ — простая задача;
* — трудная задача.

Если Вы справились с обязательными задачами, мы рекомендуем порешать дополнительные, за которые ставится отдельная оценка. Они отмечены знаком $^\bigstar$ и, как правило, не уступают по сложности задачам, отмеченным знаком *.

В конце брошюры приведены некоторые общематематические обозначения, которыми мы будем пользоваться.

Если у Вас возникнут вопросы при чтении брошюры или появятся замечания по её содержанию, присылайте их вместе с решёнными задачами.

Желаем удачи!

Глава 1

Основные понятия

Трудности, с которыми сталкивается чуть ли не каждый школьник, решающий уравнение[1], бывают *арифметического* и *логического* характера. Соответственно и ошибки в решении уравнений делятся на такие же две категории. Арифметические ошибки появляются из-за невнимательности, нечёткого знания формул, неразборчивого почерка и т. д. Не останавливаясь подробно на этих ошибках, отметим здесь только то, что их появление во многом зависит от выбранного метода решения. Мы рекомендуем избегать лишних, громоздких вычислений и, вообще, экономить на арифметике (например, за счёт более рациональных рассуждений). Цель настоящей главы — уберечь читателя от логических ошибок[2], возникающих в первую очередь из-за недостаточного понимания поставленной задачи — решить уравнение.

§ 1. Основные логические связи между утверждениями

В этом параграфе мы введём и объясним на примерах некоторые общематематические понятия, знание и понимание которых совершенно необходимо для решения уравнений и неравенств.

Пусть A и B — два утверждения.

[1]Или другую математическую задачу.
[2]Особенно при решении задач с *параметрами*.

1. Логическое следствие. Запись $A \Longrightarrow B$ (или, что то же, $B \Longleftarrow A$) означает, что из утверждения A *следует* утверждение B. Иными словами, если верно A, то верно и B. В таких случаях говорят, что A достаточно для B, а B необходимо для A. В частности, из ложного утверждения следует любое утверждение и из любого утверждения следует истинное утверждение. Приведём примеры.

Пример 1. $2 = 1 + 1 \Longrightarrow 2 \cdot 2 = 4$. Оба утверждения истинны.

Пример 2. K — квадрат $\Longrightarrow K$ — прямоугольник $\Longrightarrow K$ — параллелограмм $\Longleftarrow K$ — ромб. Эта цепочка следствий справедлива для любого четырёхугольника K.

Пример 3. $x \in \varnothing \Longrightarrow y = z$ — верно при всех x, y, z. Заметим, что условие $x \in \varnothing$ всегда ложно (по определению пустого множества — см. с. 62).

Пример 4. $\frac{a}{x} = b \Longrightarrow a = bx$. Это следствие верно при всех $a, b, x \in \mathbb{R}$, в том числе и при $x = 0$, поскольку тогда первое равенство ложно ввиду неопределённости его левой части (см. § 4). А вот обратное следствие (т. е. $\frac{a}{x} = b \Longleftarrow a = bx$) неверно, например, при $a = x = 0$, $b = 1$: из истинного равенства $0 = 1 \cdot 0$, конечно, не следует ложное $\frac{0}{0} = 1$.

2. Логическая равносильность. Равносильность (эквивалентность) утверждений A и B означает, что они либо оба истинны, либо оба ложны, т. е. верны одновременно два следствия: $A \Longrightarrow B$ и $B \Longrightarrow A$, что обозначается естественным образом: $A \Longleftrightarrow B$. В таких случаях говорят, что A необходимо и достаточно для B, A верно тогда и только тогда, когда верно B и т. п.

Пример 1. $a = b \Longleftrightarrow a^3 = b^3$.

Пример 2. $\dfrac{1}{a} = \dfrac{1}{b} \Longleftrightarrow a = b \neq 0$.

Пример 3. Четырёхугольник является вписанным тогда и только тогда, когда сумма его противоположных углов равна 180°.

3. Система утверждений A и B истинна тогда и только тогда, когда истинны *оба* утверждения: и A, и B. Обозначение: $\begin{cases} A \\ B. \end{cases}$ Понятие системы распространяется на случай произвольного числа утверждений.

Пример 1. $\begin{cases} 0 \geqslant 0 \\ 1 \geqslant 0 \end{cases}$ — верно.

Пример 2. $\begin{cases} 0 < 0 \\ 1 \geqslant 0 \end{cases}$ — неверно.

Пример 3. $\begin{cases} x \leqslant 0 \\ x \geqslant 0 \end{cases}$ — верно только при $x = 0$.

4. Совокупность утверждений A и B истинна тогда и только тогда, когда истинно *хотя бы одно* из утверждений: A или B. Обозначение: $\left[\begin{array}{l} A \\ B. \end{array}\right.$
Как и понятие системы, понятие совокупности распространяется на случай любого числа утверждений.

Пример 1. $\left[\begin{array}{l} n \text{ — чётное} \\ n \text{ — нечётное} \end{array}\right.$ — верно при всех $n \in \mathbb{Z}$.

Пример[1] *2.* $\left[\begin{array}{l} |x| = x \\ |x| = -x \end{array}\right.$ — верно при любом $x \in \mathbb{R}$.

Пример 3. $\left[\begin{array}{l} x^2 + y^2 + 1 = 0 \\ z \in \varnothing \end{array}\right.$ — неверно ни при каких $x, y, z \in \mathbb{R}$.

Читателю предлагается установить справедливость следующих утверждений.

1. $A \Longleftrightarrow A$.

2. $\begin{cases} A \\ B \end{cases} \begin{array}{l} \Longrightarrow A \Longrightarrow \\ \Longrightarrow B \Longrightarrow \end{array} \left[\begin{array}{l} A \\ B. \end{array}\right.$

3. $(A \Longleftrightarrow B) \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} A \Longrightarrow B \\ B \Longrightarrow A. \end{cases}$

4. Пусть из A следует B. Тогда если B ложно, то и A ложно. На этом основан метод доказательства от противного. Приведём пример.

Поскольку $x = 2 \Rightarrow |x-2| \neq |x+2|$, то $|x-2| = |x+2| \Rightarrow x \neq 2$.

5. Если $A \Longrightarrow B$, то $\begin{cases} A \\ B \end{cases} \Longleftrightarrow A$. Это означает, что из системы можно выбрасывать условия, вытекающие из других условий той же системы, например:

а) $\begin{cases} x \geqslant 0 \\ x > 1 \end{cases} \Longleftrightarrow x > 1$;

[1] Определение модуля дано на с. 23.

б) $\begin{cases} \frac{1}{x} = y \\ x \neq 0 \end{cases} \iff \frac{1}{x} = y.$

И наоборот, к системе можно приписывать следствия из неё (к примеру, чтобы потом ими воспользоваться). Например:

а) $|T| = U \iff \begin{cases} |T| = U \\ U \geqslant 0; \end{cases}$

б) $x^4 - 2x^3 - 2x + 1 = 0 \iff \begin{cases} x^4 - 2x^3 - 2x + 1 = 0 \\ x \neq 0. \end{cases}$

6. Если $A \Longrightarrow B$, то $\left[\begin{array}{l} A \\ B \end{array}\right. \iff B.$

Иными словами, из двух условий в совокупности можно оставить только более слабое, например, $\left[\begin{array}{l} a = 0 \\ ab = 0 \end{array}\right. \iff ab = 0.$

§ 2. Что такое уравнение[1] и что значит его решить

Всякое уравнение имеет вид равенства. Однако не следует отождествлять эти понятия: ведь одно и то же равенство можно рассматривать относительно разных переменных[2] и получать таким образом разные уравнения.

При этом переменные, не отнесённые к числу неизвестных, называют *параметрами*[3]. Например, уравнение

$$ax = a \tag{1}$$

можно рассматривать относительно x с параметром a, относительно a с параметром x и даже относительно y с параметрами a, x.

Итак, **уравнение — это равенство двух числовых выражений с выделенным набором переменных, именуемых *неизвестными.***

[1] Для удобства мы говорим только об уравнениях, хотя весь материал этой главы переносится и на неравенства.

[2] Даже относительно тех, которые явно в нём не фигурируют.

[3] Так же, как и неизвестные, они не обязаны явно фигурировать в уравнении.

В нашей брошюре мы будем рассматривать только уравнения, все переменные в которых принимают *действительные* значения.

Рассмотрим для начала уравнение с одной неизвестной x без параметров[1]. Оно имеет вид

$$F(x) = 0, \tag{2}$$

где F — *заданная* числовая функция.

Решением уравнения (2) называется всякое число x, обращающее его в верное числовое равенство. Такое число x называется также *корнем* уравнения (этот термин применяется только к уравнениям и только с одним неизвестным, возможно, с параметрами).

Множество

$$X = \{\, x \mid F(x) = 0 \,\} \tag{3}$$

всех решений, записанное в *явном* виде, и является ответом к задаче „Решить уравнение $F(x) = 0$". Например, ответ к уравнению $x^2 = 4$ может быть записан так: $\{\pm 2\}$, $\{-2, 2\}$, ± 2, $x = \pm 2$, $x \in \{-2, 2\}$, но не так: $\{\, x \mid x^2 = 4 \,\}$.

Однако получить правильный ответ не достаточно. Как и при решении любой задачи, необходимо ещё *доказать его правильность,* т. е. доказать равенство (3) или, что то же, доказать для всех x равносильность

$$x \in X \quad \Longleftrightarrow \quad F(x) = 0. \tag{4}$$

Здесь следствие $\Longrightarrow$ означает, что всякое число из множества X удовлетворяет уравнению (2), а обратное следствие $\Longleftarrow$ показывает, что всякий корень уравнения (2) принадлежит множеству X, т. е. уравнение других корней не имеет.

Обратим внимание читателя на два важных частных случая, которые могут возникнуть, когда уравнение *вырождается,* т. е. когда в нём исчезает неизвестная[2] и оно превращается в обычное числовое равенство. В соответсвии с определением (3), множеством решений таких уравнений является или множество всех действительных чисел (если равенство верно), или пустое множество (если равенство неверно).

Пример[3]**.** а) $x(x-1)(x+1) + x = x^3$; б) $(x+1)^2 = x^2 + 2x$.

---

[1] О том, что значит решить уравнение с параметрами, будет рассказано в § 5.

[2] Или её нет с самого начала.

[3] Как правило, мы будем опускать само задание, предполагая, что уравнение (неравенство, систему и т. д.) требуется решить, а условие и ответ в тексте решения будем во избежание повторов заменять многоточием. В письменных работах так делать не следует.

Решение. а) $\ldots \iff x(x^2-1)=x^3-x \iff 0=0$;
б) $\ldots \iff x^2+2x+1=x^2+2x \iff 1=0$.
Ответ: а) $\mathbb{R}$; б) $\varnothing$.

§ 3. Основные методы решения уравнений и неравенств

1. Метод равносильных преобразований. Как правило, для доказательства равносильности (4) удобно провести цепочку равносильных утверждений (уравнений, неравенств, систем, совокупностей и т. п.), начинающуюся исходным уравнением и кончающуюся ответом. И именно этим методом мы рекомендуем пользоваться в большинстве случаев.

Пример.

$$\frac{x^2-2}{x}=\frac{2(x-1)}{x}.$$

Решение. $\ldots \iff \begin{cases} x^2-2=2(x-1) \\ x\neq 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x(x-2)=0 \\ x\neq 0 \end{cases} \iff \ldots$

Ответ: $x=2$.

Однако существуют и другие методы, которые подчас оказываются более удобными. Они заключаются в том, что требуемая равносильность доказывается в два этапа: сначала в одну сторону, потом в другую. В связи с этим выделяют два логически противоположных метода решения.

2. Метод следствий (метод проверки). Сначала от уравнения переходят к следствию, получая множество, содержащее все его корни, а затем каждое число из этого множества проверяют непосредственной подстановкой в исходное уравнение.

Пример. $|x-1|+x^2-2|x|+1=0$.

Решение. $\ldots \implies |x-1|+(|x|-1)^2=0 \implies |x-1|=0 \implies x=1$.
Проверка показывает, что $x=1$ — корень исходного уравнения.

Ответ: $x=1$.

Отметим, что заключительную часть решения можно было записать иначе:

$$\ldots \implies x=1 \implies |x-1|+x^2-2|x|+1=0.$$

Замкнув по кругу цепь следствий, мы доказали, что все уравнения этой цепи равносильны между собой.

3. Метод подбора. Сначала как-то подбираются корни уравнения, а затем доказывается, что других корней уравнение не имеет.

Пример. $x^3 + 3x = 4$.

Решение. 1. $x = 1$ — корень уравнения.

2. Других корней уравнение не имеет, т. к. его левая часть строго возрастает[1] как сумма строго возрастающих функций.

Ответ: $x = 1$.

Какой бы метод Вы не выбрали, помните, что от текста Вашего решения (доказательства правильности ответа) требуется не только безошибочность, но и ясность, и достаточная подробность. О степени подробности можно судить по решениям, приводящимся в этой брошюре.

§ 4. Область допустимых значений (ОДЗ)

уравнения $F(x) = 0$ — это область определения функции F, т. е. множество всех x, при которых выражение $F(x)$ *определено* или, как ещё говорят, *имеет смысл*. Такие числа x можно подставить в выражение $F(x)$ и вычислить его значение. Приведём примеры[2]:

1) $\dfrac{1}{x}$ определено $\iff$ $x \neq 0$;

2) $\sqrt{x}$ определено[3] $\iff$ $x \geqslant 0$;

3) $T + U$ определено $\iff$ T и U определены;

4) $\dfrac{T}{\sqrt{U}}$ определено $\iff$ $\begin{cases} T \text{ определено} \\ U > 0 \ (\Rightarrow U \text{ определено}). \end{cases}$

Часто в процессе преобразований, при использовании различных формул ОДЗ расширяется или сужается, что может привести к аналогичным изменениям множества решений.

Наивно, однако, полагать, что выписывание[4] ОДЗ перед началом решения (с последующей проверкой найденных корней) избавляет ре-

[1] Определение возрастающей функции см. в § 13.

[2] Строчными буквами мы обозначаем переменные для действительных чисел, а заглавными — для числовых выражений.

[3] Определение корня дано на с. 42.

[4] И уж тем более явное нахождение.

шающего от всех проблем и позволяет в дальнейшем совершать любые преобразования. Такие решения во всяком случае не оптимальны, а как правило, просто ошибочны и свидетельствуют о том, что решающий не понимает логику обоснования ответа. Приведём типичное безграмотное решение примера, разобранного в предыдущем параграфе методом равносильных преобразований.

Пример. $\dfrac{x^2-2}{x}=\dfrac{2(x-1)}{x}$.

„*Решение*". Домножив обе части на x, получим $\boxed{\text{ОДЗ: } x \neq 0.}$

$$x^2-2=2x-2, \tag{5}$$

откуда $x=0$ или $x=2$.

В ОДЗ входит только $x=2$. Это и есть ответ.

Ответ: 2.

Казалось бы, получен правильный ответ и, по существу, проделана та же работа, что и в правильном решении. К чему же здесь можно придраться? Дело в том, что, в отличие от решения методом равносильных преобразований, здесь отсутствует логическая связь между исходным уравнением, уравнением (5) и условием $x \neq 0$, а приведённых рассуждений недостаточно, чтобы доказать равносильность (4). Формально в ошибочном решении от уравнения перешли к следствию из него, а потому в конце должна быть сделана проверка найденных корней, которая осуществляется их подстановкой в исходное уравнение, а не в его ОДЗ (см. § 3). Что касается текста в рамочке (т. е. ОДЗ), то проверяющий может, вообще, его проигнорировать, поскольку непонятно, в какой момент он должен его прочитать. Судите сами: „решение" начинается со слов „Домножив обе части ...", и если идти далее по тексту, мы придём к ответу, так и не дойдя до рамочки в правом верхнем углу. Но даже с учётом ОДЗ „решение" нельзя считать безукоризненным по причинам, изложенным выше.

И всё же ОДЗ играет очень важную роль в решении уравнений и неравенств. За изменениями ОДЗ надо внимательно следить и *вовремя* принимать необходимые меры. Так, если ОДЗ расширилась, то в систему с полученным уравнением или неравенством надо вписывать пропавшие ограничения. Что касается сужения ОДЗ, то его допускать вообще не следует, поскольку это может привести к потере решений.

Задачи

1°. ✓ а) $\dfrac{x}{x} = 1$;

б) $\dfrac{\sqrt{x}}{\sqrt{x}} = 1$;

в) $\dfrac{0}{x} < 1$;

✓ г) $\dfrac{0}{\sqrt{-x}} \geqslant 0$.

2°. ✓ а) $\dfrac{x^3-1}{x^2-1} = \dfrac{x^2+x+1}{x+1}$;

б) $\dfrac{x^3+x+\dfrac{x}{x-1}}{x+\dfrac{1}{x-1}} = x^2$;

в) $\dfrac{x^2+1}{x} < \dfrac{1}{x}$;

✓ г) $\dfrac{1}{\dfrac{1}{x}+\dfrac{1}{x-1}} = \dfrac{x^2-x}{2x-1}$.

3°. ✓ а) $\sqrt{x} = \sqrt{-x} + x$;

✓ б) $\dfrac{x-1}{\sqrt{x}-1} = \sqrt{x}+1$;

в) $\sqrt[4]{x^2} = \sqrt{x}$;

г) $\dfrac{x\sqrt{x}+1}{\sqrt{x}+1} = x - \sqrt{x} + 1$.

§ 5. Уравнения с параметрами

Перейдём теперь к общему случаю. Пусть уравнение помимо неизвестных содержит параметры. Если вместо них подставлять конкретные числа, то будут получатся уравнения уже без параметров, и у каждого из этих уравнений будет своё множество решений. Иными словами, каждому набору значений параметров сопоставляется множество решений соответствующего уравнения. Это соответствие и является ответом к задаче, в которой требуется решить уравнение для всех значений параметров.

Поясним на примере уравнения (1), как может выглядеть ответ к уравнению.

Неизвестные	Параметры	Ответ
x	a	$x = 1$ при $a \neq 0$; $x \in \mathbb{R}$ при $a = 0$
a	x	$a \in \mathbb{R}$ при $x = 1$; $a = 0$ при $x \neq 1$
y	a, x	$y \in \mathbb{R}$ при $ax = a$; $y \in \varnothing$ при $ax \neq a$

Пример. Для каждого a решить уравнение $ax = 1$. Найти все a, при которых все корни этого уравнения рациональные.

Решение. 1. При $a = 0$ уравнение корней не имеет, а потому все его корни рациональные[1].

2. При $a \neq 0$ $\quad ax = 1 \quad \Longleftrightarrow \quad x = \frac{1}{a}$. $\ \frac{1}{a} \in \mathbb{Q} \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \neq a \in \mathbb{Q}$.

Ответ: $x \in \varnothing$ при $a = 0$; $x = \frac{1}{a}$ при $a \neq 0$.
$a \in \mathbb{Q}$.

Пример. Для каждой тройки (a, b, c) решить уравнение

$$ax^2 + bx + c = 0.$$

Решение. Рассмотрим случаи:

1. $a = 0$: $bx + c = 0$.
   1а. $b \neq 0$: $x = -\frac{c}{b}$.
   1б. $b = 0$: $c = 0$. $x \in \mathbb{R}$ при $c = 0$ и $x \in \varnothing$ при $c \neq 0$.

2. $a \neq 0$: $\left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 + \left(\frac{c}{a} - \frac{b^2}{4a^2}\right) = 0 \iff \left(x + \frac{b}{2a}\right)^2 = \frac{b^2-4ac}{4a^2}$.
   2а. $b^2 - 4ac \geqslant 0$: $x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}$.
   2б. $b^2 - 4ac < 0$: $x \in \varnothing$.

Ответ:

$x \in \mathbb{R}$	при $a = b = c = 0$;
$x \in \varnothing$	при $a = b = 0$, $c \neq 0$ и
	при $a \neq 0$, $b^2 - 4ac < 0$;
$x = -\dfrac{c}{b}$	при $a = 0$, $b \neq 0$;
$x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$	при $a \neq 0$, $b^2 - 4ac \geqslant 0$.

Решение последнего примера можно было написать компактнее.

$$ax^2 + bx + c = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} a = b = c = 0 \\ \begin{cases} a = 0 \\ x = -\frac{c}{b} \end{cases} \\ \begin{cases} a \neq 0 \\ x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2-4ac}}{2a}. \end{cases} \end{array}\right. \tag{6}$$

Случаи $\begin{cases} a = b = 0 \\ c \neq 0 \end{cases}$ и $\begin{cases} a \neq 0 \\ b^2 - 4ac < 0 \end{cases}$ в (6) отсутствуют, поскольку в каждом из них равенство $ax^2 + bx + c = 0$ ложно, а ложь в совокупности

[1] Нет ни одного нерационального корня!

можно опускать (см. с. 7). В ответе эти случаи надо обязательно выделить, ведь решить уравнение требуется *для всех* значений параметров (вспомните формулировку задачи!).

Задачи

$\surd$ **4°.** 1. Решить для любого a следующие уравнения и неравенства относительно x.

2. Найти все a, при которых уравнение (неравенство) имеет хотя бы одно решение.

3. Найти все a, при которых все решения уравнения (неравенства) принадлежат отрезку $[0,1]$.

Указание. пустое множество является подмножеством любого множества.

а) $x = 0$; в) $0 \geqslant 0$; д) $x < a$;

$\surd$ б) $a = 0$; $\surd$ г) $0 > 0$; $\surd$ е) $a^2x + a(a-1) = 0$.

5°. 1. Решить для любого x уравнения и неравенства предыдущей задачи относительно a.

2. Найти все x, при которых уравнение (неравенство) имеет хотя бы одно решение.

3. Найти все x, при которых все решения уравнения (неравенства) принадлежат отрезку $[0,1]$.

6. Для каждой тройки (a,b,c) решить неравенства

$\surd$ а) $ax^2 + bx + c > 0$;

б) $ax^2 + bx + c \geqslant 0$.

Часть I

Глава 2

Рациональные уравнения и неравенства

§ 6. Расщепление уравнений и неравенств

Правила расщепления следуют из свойств действительных чисел и формулируются следующим образом.

Пусть $a, b \in \mathbb{R}$. Тогда

$$1)\ ab = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad a = 0 \ \text{ или } \ b = 0;$$

$$2)\ ab > 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a > 0 \\ b > 0 \end{cases} \text{или} \ \begin{cases} a < 0 \\ b < 0; \end{cases}$$

$$3)\ ab < 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} a > 0 \\ b < 0 \end{cases} \text{или} \ \begin{cases} a < 0 \\ b > 0. \end{cases}$$

Правила расщепления нестрогих[1] неравенств получаются из 2) и 3) заменой всех строгих неравенств на соответствующие[2] нестрогие.

[1]Нестрогие неравенства — это неравенства со знаками $\leqslant$ и $\geqslant$, строгие — со знаками $<$ и $>$.

[2]Т. е. $<$ меняется на $\leqslant$, а $>$ — на $\geqslant$.

Задачи

√ **7.** Сформулировать правила расщепления следующих уравнений и неравенств: а) $\dfrac{a}{b} = 0$; б) $\dfrac{a}{b} \leqslant 0$; в) $\dfrac{a^2}{b} \geqslant 0$.

8. Решить уравнения и неравенства, используя правила расщепления.

√ а) $\dfrac{x^3(x^4-1)}{x+1} = 0$;

б) $\dfrac{1}{3-2x} \leqslant 1$;

√ в) $\dfrac{1}{x-96} \leqslant \dfrac{x}{x-96}$;

г) $\dfrac{x^2-5x+4}{5-x} > 0$.

√ д) При каждом a решить уравнение $\dfrac{a}{2a-x} = 3$.

§ 7. Метод интервалов

применяется для решения неравенств, приведённых к виду[1]

$$f(x) = (x-x_1)^{k_1} \ldots (x-x_n)^{k_n} \vee 0, \tag{7}$$

где $x_i \in \mathbb{R}$, $k_i \in \mathbb{Z}$.

Чтобы решить неравенство (7), надо расположить на числовой прямой[2] точки $x_1, \ldots, x_n$ и на каждом из получившихся интервалов определить знак $f(x)$. Для определения знаков удобно пользоваться следующим правилом: на самом правом интервале $f(x) > 0$, а при переходе через очередную точку x_i $f(x)$ меняет знак в случае нечётного k_i и сохраняет знак в случае чётного k_i.

При выписывании ответа надо выбрать нужные интервалы и присоединить к ним подходящие точки x_i. Так, если неравенство строгое, то точки x_i не входят в ответ, а если нестрогое, то неравенству удовлетворяют точки, обнуляющие $f(x)$ (точки, при которых $f(x)$ теряет смысл, конечно, никогда не входят в ответ). Особое внимание надо уделить тем точкам x_i, которым соответствуют чётные k_i.

Пример. $x(x+1)(x-2) < 0$.

Решение. $\ldots \iff \left[\begin{array}{l} 0 < x < 2 \\ x < -1 \end{array}\right.$ (см. рис. 1).

[1] Символ $\vee$ обозначает один из знаков $=, \neq, <, >, \leqslant, \geqslant$.

[2] Если скобки всего две, то можно обойтись и без картинки.

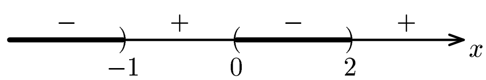

Рис. 1

Ответ: $(-\infty, -1) \cup (0, 2)$.

Иногда для правильного расположения точек x_i на числовой прямой некоторые из них приходится сравнивать друг с другом.

Пример. $\dfrac{(x^2-1)(3x-5)^2}{x^2-3} \geqslant 0.$

Грубой ошибкой было бы домножить неравенство на x^2-3, так как это выражение принимает значения разных знаков.

Решение. $\quad \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{(x-1)(x+1)(x-5/3)^2}{(x-\sqrt{3})(x+\sqrt{3})} \geqslant 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots$

(см. рис. 2, где учтено неравенство $5/3 < \sqrt{3} \Leftrightarrow 5^2 < 3^2 \cdot 3$, что верно).

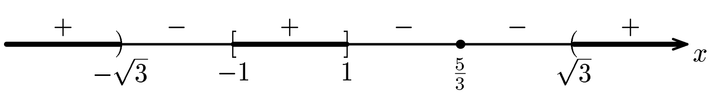

Рис. 2

Ответ: $(-\infty, -\sqrt{3}) \cup [-1, 1] \cup \{5/3\} \cup (\sqrt{3}, +\infty)$.

В некоторых случаях бывает удобно совмещать метод интервалов с методом расщепления. Так, если степень k_i чётна, то можно *сократить* неравенство (7) на скобку $(x-x_i)^{k_i}$, *отдельно исследовав* точку x_i.

Пример. $x^2(x-1) \geqslant 0$.

Прежде чем делить на x^2, надо отдельно рассмотреть случай $x = 0$. Т. к. в этом случае неравенство выполнено, выделим этот случай в совокупности и далее будем считать, что $x \neq 0$. А тогда $x^2 > 0$ и на x^2 можно разделить обе части неравенства.

Решение. $\quad \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} x = 0 \\ x - 1 \geqslant 0. \end{array}\right.$

Ответ: $\{0\} \cup [1, +\infty)$.

Пример. $\dfrac{(x+1)^2(x-1)^3}{x^2-1} \geqslant 0.$

При сокращении дроби на $x^2 - 1 = (x-1)(x+1)$ надо дописать в систему ограничение $x \neq \pm 1$. При нём выражение $(x-1)^2$ положительно, и на него можно разделить неравенство.

Решение. $\quad \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (x+1)(x-1)^2 \geqslant 0 \\ x \neq \pm 1 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x+1 > 0 \\ x \neq 1. \end{cases}$

Ответ: $(-1,1) \cup (1,+\infty)$.

Задачи

√ **9°.** $x(x-1)(x+1) < 0$.

10. $\dfrac{1}{1+\dfrac{1}{x}} \leqslant 2$.

√ **11.** $\dfrac{\dfrac{1}{x-1}-1}{1-\dfrac{1}{x-7}} \geqslant 0$.

√ **12.** $\dfrac{x^2(x+2)}{2x+1} \leqslant 0$.

13. $\dfrac{(3x-2)^5}{x^3(x+1)} > 0$.

14. $\dfrac{(x-2)^3}{x^2(x+1)} \leqslant 0$.

√ **15.** $\dfrac{x^2(2x-3)}{(x^2-2)(5x+7)} \leqslant 0$.

√ **16*.** $(x-1)(x-\sqrt{2})(x-\sqrt[3]{3})(x-\sqrt[4]{4})(x-\sqrt[5]{5}) < 0$.

§ 8. Разложение на множители

Если рациональное неравенство не приведено к виду (7), то перед применением метода интервалов его надо к такому виду преобразовать. При этом часто приходится раскладывать многочлены на множители. Из школьного курса хорошо известны такие методы разложения на множители, как вынесение общего множителя за скобки, метод группировки, а также формулы сокращённого умножения. Но этих стандартных средств порой бывает недостаточно, поэтому в этом параграфе мы познакомим читателя ещё с несколькими методами разложения на множители многочленов высоких степеней.

Пример. Решить неравенство $f(f(x)) \geqslant f^2(x)$, где $f(x) = 2x^2 - 1$.

Выражение $\varphi(\psi(x))$ получается из выражения $\varphi(t)$ подстановкой вместо переменной t выражения $\psi(x)$.

Решение. $\ldots \iff 2(2x^2-1)^2 - 1 \geqslant (2x^2-1)^2 \iff$

$$\iff (2x^2-1)^2 - 1 \geqslant 0 \iff$$
$$\iff (2x^2-1+1)(2x^2-1-1) \geqslant 0 \iff$$
$$\iff x^2(x-1)(x+1) \geqslant 0 \iff \ldots \text{ (см. рис. 3).}$$

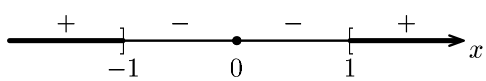

Рис. 3

Ответ: $(-\infty, -1] \cup \{0\} \cup [1, +\infty)$.

1. Нахождение рациональных корней.

Теорема[1] **Безу.** Многочлен $P(x)$ делится на двучлен $x - a$ тогда и только тогда, когда число a является корнем этого многочлена.

Эта теорема позволяет, зная корень многочлена, перейти от него к многочлену степени на единицу меньше.

Следующая теорема позволяет находить рациональные корни многочленов с целыми коэффициентами.

Теорема. Если несократимая дробь $\frac{p}{q}$ ($p \in \mathbb{Z}$, $q \in \mathbb{N}$) является корнем многочлена $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$, где все $a_i \in \mathbb{Z}$, причём $a_n \neq 0$, то p делит a_0, а q делит a_n (в частности, при $a_n = 1$ любой рациональный корень является целым).

Пример. $x^3 - 6x^2 + 5x + 12 = 0$.

Решение. $\ldots \iff (x+1)(x-3)(x-4) = 0 \iff \ldots$

Ответ: $\{-1, 3, 4\}$.

В разобранном примере сначала был найден корень -1 (сумма коэффициентов многочлена, стоящих на нечётных местах, оказалась равна сумме коэффициентов, стоящих на чётных местах), после чего многочлен разделили „уголком” на $x + 1$. Получился квадратный трёхчлен $x^2 - 7x + 12$, который был разложен на множители *в уме.* Заметим,

[1] Точнее, следствие из неё.

что все эти выкладки были проделаны на *черновике*, а в *чистовом решении* осталось только само разложение, которое не нуждается ни в каких обоснованиях, так как проверяется простым раскрытием скобок и приведением подобных.

Пример. $\dfrac{2x^2}{x-3} \leqslant \dfrac{1}{x-1}$.

Решение. $\ldots \iff \dfrac{(x+1)(2x^2-4x+3)}{(x-3)(x-1)} \leqslant 0$, причём $2x^2-4x+3>0$ (т. к. $D_1 = 2^2 - 2\cdot 3 < 0$) $\iff \ldots$ (см. рис. 4).

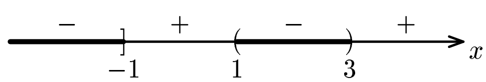

Рис. 4

Ответ: $(-\infty, -1] \cup (1, 3)$.

2. Бином Ньютона. Иногда для дальнейших упрощений бывает необходимо временно усложнить уравнение (неравенство), раскрыв скобки в выражении

$$(a+b)^n = a^n + na^{n-1}b + \ldots + C_n^k a^{n-k}b^k + \ldots + nab^{n-1} + b^n,$$

называемом биномом Ньютона. Коэффициенты[1] $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ называются *биномиальными* и могут быть найдены из *треугольника Паскаля*, по бокам которого стоят единицы, а внутри каждое число равно сумме двух выше стоящих (см. рис. 5). Коэффициент C_n^k стоит на k-м месте в n-й строке этого треугольника, если считать с нуля.

$$\begin{array}{ccccccccccccc}
&&&&&&1&&&&&& \\
&&&&&1&&1&&&&& \\
&&&&1&&2&&1&&&& \\
&&&1&&3&&3&&1&&& \\
&&1&&4&&6&&4&&1&& \\
&1&&5&&10&&10&&5&&1& \\
1&&6&&15&&20&&15&&6&&1 \\
\multicolumn{13}{c}{\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots}
\end{array}$$

Рис. 5

[1] $0! = 1! = 1$, $n! = 1\cdot 2\cdot\ldots\cdot n$ — факториал числа $n \in \mathbb{N}\cup\{0\}$.

Пример. $(x+1)^4 > 2(1+x^4)$.

Решение. $\ldots \iff x^4+4x^3+6x^2+4x+1 > 2+2x^4 \iff$

$$\iff x^4-4x^3+6x^2-4x+1 < 12x^2 \iff$$

$$\iff (x-1)^4 < \left(2\sqrt{3}\,x\right)^2 \iff$$

$$\iff (x^2-2x+1)^2 - \left(2\sqrt{3}x\right)^2 < 0 \iff$$

$$\iff \Big(x^2-2\big(1+\sqrt{3}\big)x+1\Big)\Big(x^2-2\big(1-\sqrt{3}\big)x+1\Big) < 0 \iff$$

$$\iff (x-x_1)(x-x_2) < 0, \text{ где } x_{1,2} = 1+\sqrt{3} \pm \sqrt{3+2\sqrt{3}},$$

т. к. $x^2-2\big(1-\sqrt{3}\big)x+1 > 0$

$$\Big(D_1 = \big(1-\sqrt{3}\big)^2 - 1 = -\sqrt{3}\cdot\big(2-\sqrt{3}\big) < 0\Big) \iff \ldots$$

Ответ: $1+\sqrt{3}-\sqrt{3+2\sqrt{3}} < x < 1+\sqrt{3}+\sqrt{3+2\sqrt{3}}$.

3. Замена переменной. Иногда при помощи удачной группировки или перегруппировки членов можно выявить *устойчивое* выражение, которое *при желании* можно обозначить новой буквой.

Пример. $x(x+1)(x+2)(x+3) = 15$.

Решение. $\ldots \iff (x^2+3x)(x^2+3x+2) = 15 \iff$

$$\iff (x^2+3x)^2 + 2(x^2+3x) - 15 = 0 \iff$$

$$\iff (x^2+3x-3)(x^2+3x+5) = 0 \iff$$

$$\iff x = \tfrac{-3\pm\sqrt{21}}{2},$$

т. к. $x^2+3x+5 > 0$ $(D = 3^2 - 4\cdot 5 < 0)$.

Ответ: $x = \frac{-3\pm\sqrt{21}}{2}$.

Уравнения вида[1] $ax^4 \pm bx^3 + cx^2 \pm bx + a = 0$ $(a \neq 0)$ могут быть сведены к квадратным относительно новой переменной $y = x \pm \frac{1}{x}$. Поясним сказанное на примере.

Пример. $2x^4 + 3x^3 - x^2 + 3x + 2 = 0$.

Прежде чем делить на x^2, нужно рассмотреть случай $x = 0$ или хотя бы отметить его несостоятельность.

[1]Это частный случай так называемых *возвратных* уравнений.

Решение. $\ldots \quad (\Rightarrow\ x \neq 0) \iff 2x^2 + 3x - 1 + \frac{3}{x} + \frac{2}{x^2} = 0 \iff$

$\iff 2\left(x + \frac{1}{x}\right)^2 + 3\left(x + \frac{1}{x}\right) - 5 = 0 \iff x + \frac{1}{x} \in \{1, \frac{5}{2}\} \iff$

$\iff x + \frac{1}{x} = 2 + \frac{1}{2}$, т. к. $\left|x + \frac{1}{x}\right| \geqslant 2$ при $x \neq 0$, $\iff$

$\iff \frac{(x-2)(x-1/2)}{x} = 0 \iff \ldots$

Ответ: $\{2, \frac{1}{2}\}$.

Иной раз даже правильно подобранная константа при замене переменной позволяет существенно упростить выкладки.

Пример. $(x+3)^4 + (x+5)^4 \leqslant 16$.

Решение. $\ldots \iff (y-1)^4 + (y+1)^4 \leqslant 16$, где $y = x + 4$, $\iff$

$\iff 2(y^4 + 6y^2 + 1) \leqslant 16 \iff y^4 + 6y^2 - 7 \leqslant 0 \iff$

$\iff (y^2 - 1)(y^2 + 7) \leqslant 0 \iff -1 \leqslant y = x + 4 \leqslant 1 \iff \ldots$

Ответ: $[-5, -3]$.

Задачи

17°. $4x + 7 \leqslant \dfrac{2}{x}$.

18. $\dfrac{x}{1-x} < x - 6$.

√ **19°.** $x \leqslant 3 - \dfrac{1}{x-1}$.

√ **20.** $(x^2 - 4x)^2 \leqslant 16$.

21. $\dfrac{1}{x+6} + \dfrac{1}{x-2} \geqslant \dfrac{1}{x-3}$.

√ **22.** $\dfrac{1}{x^2 + 8x - 9} \geqslant \dfrac{1}{3x^2 - 5x + 2}$.

√ **23*.** $(5-x)^4 + (2-x)^4 > 17$.

24*. $(x-1)(x-3)(x-4)(x-6) > 17$.

√ **25*.** $\dfrac{1}{x^2} + \dfrac{1}{(x-2)^2} < \dfrac{10}{9}$.

26★. $\left(\dfrac{x}{x-1}\right)^2 + \left(\dfrac{x}{x+1}\right)^2 \geqslant \dfrac{40}{9}$.

27★. $\dfrac{x^8 + x^6 - 4x^4 + x^2 + 1}{x^8 - x^6 - x^2 + 1} > 0$.

28★. Найти все a, при которых система

$$\begin{cases} x^3 - (a+3)x^2 + (3a+2)x - 2a \geqslant 0 \\ x^3 - (a+3)x^2 + 3ax \leqslant 0 \end{cases}$$

имеет единственное решение.

Глава 3

Уравнения и неравенства с модулями

В школьном курсе даётся два определения модуля. Напомним их.

Определение 1. $|x|$ — *расстояние* между точками 0 и x.

Определение 2. $|x| = \begin{cases} x, & \text{если } x > 0; \\ 0, & \text{если } x = 0; \\ -x, & \text{если } x < 0. \end{cases}$

Отметим, что случай $x = 0$ можно присоединить к одному из неравенств $x > 0$, $x < 0$, а лучше[1] — сразу к обоим.

График функции модуль изображён на рис. 6.

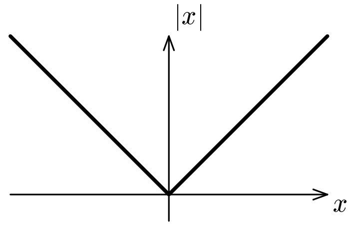

Рис. 6

[1] Для симметрии.

Приведём основные свойства модулей:

1) $|a| \geqslant 0$;
2) $|a| = |-a|$;
3) $|a|^n = |a^n|$;
4) $|ab| = |a||b|$;
5) $\left|\dfrac{a}{b}\right| = \dfrac{|a|}{|b|}$ $(b \neq 0)$;
6) $|a+b| \leqslant |a| + |b|$;
7) $\big||a| - |b|\big| \leqslant |a - b|$.

Перейдём к рассмотрению методов решения задач с модулями. Буквами T, U, ... будем обозначать произвольные числовые выражения[1], содержащие какие угодно переменные. Все равносильности, приведённые ниже, истинны *для всех* значений этих переменных.

§ 9. Отбрасывание модулей

1. Модули, стоящие в обеих частях уравнения, отбрасываются так[2]:

$$|T| = |U| \quad \Longleftrightarrow \quad T = \pm U. \qquad (8)$$

Докажем это.
$\Longleftarrow$: модули равных и противоположных чисел равны (свойство 2);
$\Longrightarrow$: как бы ни раскрывались модули в уравнении $|T| = |U|$, всегда получается одно из уравнений: $T = U$, $T = -U$, $-T = U$ или $-T = -U$, т. е. просто $T = \pm U$.

Пример. $|2x - 5| = 1$.

Решение. $\ldots \iff 2x - 5 = \pm 1 \iff x = \frac{5 \pm 1}{2}$.

Ответ: $\{2, 3\}$.

Пример. $\dfrac{|x-1|}{|x-2|} = \dfrac{|x+1|}{|x+2|}$.

Сперва избавимся от дробей, домножив уравнение на оба знаменателя. Вообще говоря, надо бы дописать ограничение $x \neq \pm 2$, но в данном случае оно выполняется автоматически в силу полученного уравнения. Это обстоятельство обязательно следует отметить[3] как обоснование перехода, что и сделано в приведённом ниже решении.

---

[1] Быть может, не всюду определённые.

[2] Отметим, что утверждение $T = \pm U$ является не уравнением, а совокупностью двух уравнений $T = U$ и $T = -U$.

[3] Вместо того, чтобы таскать ограничение $x \neq \pm 2$ за собой на протяжении всего решения.

Решение.[1] $\quad \ldots \iff |(x-1)(x+2)| = |(x+1)(x-2)|$

$$(\Rightarrow x \neq \pm 2) \iff x^2+x-2 = \pm(x^2-x-2) \iff$$

$$\iff \left[\begin{aligned} &x=0 \\ &x^2-2=0 \end{aligned}\right. \iff \ldots$$

Ответ: $\{0, \pm\sqrt{2}\}$.

Пример. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют равенству $\big||x|-|y|\big| = 1$.

Решение. При замене x на $-x$ или y на $-y$ уравнение не меняется, поэтому достаточно рассмотреть случай $x, y \geqslant 0$, а затем симметрично отразить полученное множество относительно координатных осей и начала координат. При $x, y \geqslant 0$ имеем

$$\ldots \iff |x-y| = 1 \iff x-y = \pm 1 \iff y = x \pm 1.$$

Ответ: см. рис. 7.

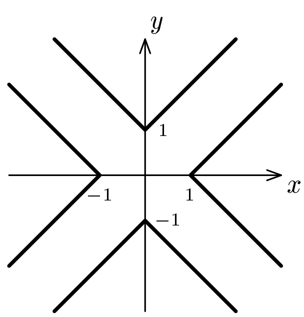

Рис. 7

Пример. $\begin{cases} |x-1| + |y-5| = 1 \\ y = 5 - |x-1|. \end{cases}$

Подставим y из второго уравнения в первое и воспользуемся тем, что $\big|-|x-1|\big| = |x-1|$.

Решение. $\quad \ldots \iff \begin{cases} y = 5-|x-1| \\ 2|x-1| = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} x = 1 \pm \frac{1}{2} \\ y = 5 - \frac{1}{2}. \end{cases}$

Ответ: $(x, y) = \left(1 \pm \frac{1}{2}, \frac{9}{2}\right)$.

[1] В решении было использовано свойство 4) модулей.

2. Чтобы избавиться от модулей в неравенстве вида $|T| \vee |U|$, его можно возвести в квадрат[1] и получить неравенство $T^2 \vee U^2$ (свойство 3), после чего перенести всё в левую часть и разложить разность квадратов на множители:

$$|T| \vee |U| \quad \Longleftrightarrow \quad (T-U)(T+U) \vee 0. \tag{9}$$

Заметим, что таким же способом можно было доказать равносильность (8).

Пример. $\dfrac{1}{|x-1|} > \dfrac{1}{|x+1|}$.

Положительность (на ОДЗ) обеих дробей позволяет их „опрокинуть" (т. е. обратить) и тем самым существенно упростить неравенство. Остаётся только не забыть про ОДЗ и тотчас же восстановить пропавшее ограничение на бывшие знаменатели.

Решение. $\ldots \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < |x-1| < |x+1| \quad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad 0 < (x-1)^2 < (x+1)^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 < x \neq 1.$$

Ответ: $(0,1) \cup (1,+\infty)$.

3. Если модуль стоит только в одной части уравнения, то его можно *раскрыть* по определению:

$$|T| = U \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} T \geqslant 0 \\ T = U \end{cases} \\ \begin{cases} T \leqslant 0 \\ -T = U. \end{cases} \end{array}\right. \tag{10}$$

Но есть и другой способ, сводящий задачу к уже рассмотренной. Припишем в систему к уравнению $|T| = U$ следствие из него $U \geqslant 0$, равносильное уравнению $|U| = U$. Заменяя в исходном уравнении U на $|U|$, получаем уравнение $|T| = |U|$, разобранное в п. 1. Имеем

$$|T| = U \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} U \geqslant 0 \\ T = \pm U. \end{cases} \tag{11}$$

На практике обычно пользуются одним из двух описанных способов, в зависимости от того, знак какого выражения (T или U) исследовать *проще*. Однако, если оба выражения достаточно сложны, то можно сначала

[1] Это делать можно, поскольку обе части неотрицательны на ОДЗ.

решить уравнения $T = \pm U$, а затем подставить найденные решения в соответствующие неравенства[1].

Пример. $|x^2 - 3x| = 2x - 4$.

Решение. $\quad \ldots \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - 3x = \pm(2x-4) \\ 2x - 4 \geqslant 0 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} \left[\begin{array}{l} (x-1)(x-4) = 0 \\ \left(x - \frac{1-\sqrt{17}}{2}\right)\left(x - \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right) = 0 \end{array}\right. \\ x \geqslant 2 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \ldots, \text{т. к. } \sqrt{17} > 4.$$

Ответ: $\left\{4, \frac{1+\sqrt{17}}{2}\right\}$.

4. В случае неравенств вида $|T| \vee U$ знаки T и U исследовать не нужно:

$$|T| < U \quad \Longleftrightarrow \quad -U < T < U, \tag{12}$$

$$|T| > U \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} T > U \\ T < -U \end{array}\right. \tag{13}$$

(все строгие неравенства можно заменить на соответствующие нестрогие).

Для доказательства равносильностей (12) и (13) проще всего воспользоваться представлением[2] $|a| = \max\{\pm a\}$, справедливым для любого $a \in \mathbb{R}$ (убедитесь в этом!). Докажем, к примеру, равносильность (12):

$$|T| < U \quad \Longleftrightarrow \quad \max\{\pm T\} < U \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} T < U \\ -T < U \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad -U < T < U.$$

Пример. При каждом a решить неравенство

$$|2x + a| \leqslant x + 2.$$

Решение. $\quad \ldots \Longleftrightarrow -x-2 \leqslant 2x+a \leqslant x+2 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{-a-2}{3} \leqslant x \leqslant 2-a$, причём $\frac{-a-2}{3} \leqslant 2 - a \quad \Longleftrightarrow \quad a \leqslant 4$.

Ответ: $\frac{-a-2}{3} \leqslant x \leqslant 2 - a$ при $a \leqslant 4$;
$x \in \varnothing$ при $a > 4$.

---

[1] На самом деле можно обойтись без исследования знаков T и U, но в случае уравнений особой необходимости в этом, как правило, нет.

[2] Через $\max\{a_1, \ldots, a_n\}$ обозначается максимальное из чисел $a_1, \ldots, a_n$.

Обратим внимание, что ответ „$\frac{-a-2}{3} \leqslant x \leqslant 2-a$ при всех a" неверен, хотя это двойное неравенство и равносильно исходному неравенству при всех x и a. В § 2 было сказано, что ответ должен быть записан в *явном* виде. Это относится и к случаю, когда уравнение (неравенство) не имеет решений. Подставим, к примеру, $a = 7$. Получим двойное неравенство $-3 \leqslant x \leqslant -5$, которое, конечно, нельзя писать в ответ — оно ещё не решено. Иными словами, „$x \in \varnothing$" — явный вид множества решений, а „$-3 \leqslant x \leqslant -5$" — нет (сравните с последним примером из § 5).

Что касается случая $a = 4$ (когда в ответ входит одно число), то его можно присоединять к случаю $a > 4$ (когда ответом является отрезок), но только если писать ответ в виде двойного неравенства. А если писать ответ в виде отрезка $[\frac{-a-3}{3}, 2-a]$, то случай $a = 4$ надо разбирать отдельно.

Пример. $\big||x^2-8x+2|-x^2\big| \geqslant 2x+2$.

Решение. $\ldots \iff \left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2|-x^2 \geqslant 2x+2 \\ |x^2-8x+2|-x^2 \leqslant -2x-2 \end{array}\right. \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} |x^2-8x+2| \geqslant x^2+2x+2 \\ |x^2-8x+2| \leqslant x^2-2x-2 \end{array}\right. \iff$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x^2-8x+2 \geqslant x^2+2x+2 \\ x^2-8x+2 \leqslant -x^2-2x-2 \qquad \iff \\ -x^2+2x+2 \leqslant x^2-8x+2 \leqslant x^2-2x-2 \end{array}\right.$$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ (x-1)(x-2) \leqslant 0 \\ \begin{cases} x(x-5) \geqslant 0 \\ x \geqslant \frac{2}{3}\ (>0) \end{cases} \end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l} x \leqslant 0 \\ 1 \leqslant x \leqslant 2 \\ x \geqslant 5. \end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty, 0] \cup [1, 2] \cup [5, +\infty)$.

Посмотрите, как ловко (почти устно) мы решили систему

$$\begin{cases} x(x-5) \geqslant 0 \\ x \geqslant \frac{2}{3}. \end{cases}$$

Второе её неравенство позволило разделить первое на x, после чего осталось выбрать из двух неравенств $x \geqslant 5$ и $x \geqslant \frac{2}{3}$ более сильное. Вообще, надо отметить, что решать систему обычно проще, чем каждое её условие в отдельности.

Задачи

29°. $|x^2 - 4| = 12$.

√ **30°.** $|2 - 5x^2| = 3$.

31°. $|2x - 3| = 3 - 2x$.

√ **32.** $|x^2 - 13x + 35| = |35 - x^2|$.

√ **33.** $\dfrac{|x-3|+2}{|2x-3|-5} \leqslant 0$.

34. $-1 < |x^2 - 7| < 29$.

35. Изобразить на координатной плоскости Oxy множество всех точек, координаты которых удовлетворяют равенствам

а) $|x + y| = 1$;

√ б) $|x| = y^2$;

√ в) $|x| + |y| = 1$;

г) $|3y + 2x - 2| = |x - y + 3|$.

36°. $3|x - 1| > x + 3$.

√ **37.** $\dfrac{2x-5}{|x-1|} \leqslant 1$.

√ **38.** $|x^3 + x^2 + 3x + 1| < |x^3 - 7x^2 + x - 1|$.

39. $|2x - 1| > \dfrac{1}{x-2}$.

40. $|x^2 - 8x + 15| = |15 - x^2|$.

41. $|x^2 + 2x - 7| < 2x$.

42. $\bigl|4x - |x - 2| + 3\bigr| = 16$.

√ **43.** $\bigl|x - |1 - x|\bigr| > 3$.

§ 10. Раскрытие модулей

производится с помощью определения 2 (с. 23). Числовая прямая (в случае уравнений и неравенств с одним неизвестным) разбивается на промежутки, на каждом из которых все модули раскрываются однозначно. Возникающие при этом случаи мы рекомендуем рассматривать *последовательно*, а не в виде единой совокупности.

Пример. $3|x+2|+x^2+6x+2=0$.

Решение. Рассмотрим два случая:

$$1)\ \begin{cases} x+2\geqslant 0 \\ 3(x+2)+x^2+6x+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x\geqslant -2 \quad (\Rightarrow x+8>0) \\ (x+1)(x+8)=0 \end{cases} \iff$$

$\iff\ x=-1$;

$$2)\ \begin{cases} x+2<0 \\ -3(x+2)+x^2+6x+2=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x<-2 \quad (\Rightarrow x-1<0) \\ (x-1)(x+4)=0 \end{cases} \iff$$

$\iff\ x=-4$.

Ответ: $\{-1,-4\}$.

Покажем другой способ оформления решения.

Пример. $|x-2|+2|x+1|=9$.

Решение. Рассмотрим три случая:

1) $x\geqslant 2$: $\ldots \iff x-2+2x+2=9 \iff x=3 \quad (\Rightarrow x\geqslant 2)$;

2) $-1\leqslant x\leqslant 2$: $\ldots \iff 2-x+2x+2=9 \iff x=5 \iff x\in\varnothing$;

3) $x\leqslant -1$: $\ldots \iff 2-x-2x-2=9 \iff x=-3 \ (\Rightarrow x\leqslant -1)$.

Ответ: $x=\pm 3$.

Обратим внимание на структуру решения. Каждый случай начинается с некоторого условия, после которого ставится двоеточие, означающее, что все дальнейшие рассуждения справедливы при этом условии. Как и прежде, разбор каждого случая заканчивается получением части ответа (пересечением ответа с промежутком, на котором раскрывались модули). Так, во втором случае мы написали равносильность $x=5 \Leftrightarrow x\in\varnothing$, истинную для всех $x\in[-1,2]$. Было бы ошибкой включить в ответ значение $x=5$, так как оно не принадлежит тому промежутку, на котором раскрывались модули.

Отметим также, что граничные точки можно относить только к одному случаю (как и в определении модуля), а можно рассматривать отдельно.

Пример. Найти все a, при которых уравнение

$$2|x-a|+a-4+x=0$$

имеет хотя бы один корень, причём все его корни принадлежат отрезку $[0,4]$.

Решение. Уравнение

$$\ldots \iff \left[\begin{array}{l}\begin{cases}x \geqslant a\\ 2(x-a)+a-4+x=0\end{cases}\\ \begin{cases}x \leqslant a\\ 2(a-x)+a-4+x=0\end{cases}\end{array}\right. \iff \left[\begin{array}{l}x=\frac{a+4}{3} \geqslant a\\ x=3a-4 \leqslant a\end{array}\right. \iff$$

$$\iff \begin{cases}a \leqslant 2\\ \left[\begin{array}{l}x=\frac{a+4}{3}\\ x=3a-4\end{array}\right.\end{cases}$$

имеет хотя бы корень тогда и только тогда, когда $a \leqslant 2$, при этом все его корни принадлежат отрезку $[0,4]$ тогда и только тогда, когда

$$\begin{cases}a \leqslant 2\\ 0 \leqslant \frac{a+4}{3} \leqslant 4\\ 0 \leqslant 3a-4 \leqslant 4\end{cases} \iff \begin{cases}a \leqslant 2\\ -4 \leqslant a \leqslant 8\\ \frac{4}{3} \leqslant a \leqslant \frac{8}{3}\end{cases} \iff \ldots$$

Ответ: $\frac{4}{3} \leqslant a \leqslant 2$.

Иногда метод раскрытия модулей удобно комбинировать с другими методами.

Пример. $\dfrac{|x+1|+|x-2|}{x+199} < 1$.

Если $x \geqslant -1$, то однозначно раскрывается только модуль $|x+1|$, зато знаменатель $x+199$ в этом случае положителен и на него можно домножить. Тогда модуль $|x-2|$, который не раскрывается однозначно, удаётся уединить и отбросить. Если же $x < -1$, то оба модуля раскрываются однозначно. Надеемся, что читатель не станет раскрывать модули там, где их проще отбросить.

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $x \geqslant -1$ $(\Rightarrow x+199>0)$: $\quad x+1+|x-2| < x+199 \iff$

$$\iff |x-2| < 198 \iff -198 < x-2 < 198 \iff -1 \leqslant x < 200;$$

2) $x < -1$: $\quad \dfrac{-x-1-x+2}{x+199} < 1 \iff \dfrac{x+66}{x+199} > 0 \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l}x < -199\\ -66 < x < -1.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,-199) \cup (-66,200)$.

Задачи

44°. $|2x+8|-|x-5|=12$.

√ **45°.** $|x-1|+|2x-3|=2$.

46°. $|5x-3|-|7x-4|=2x-1$.

√ **47.** $2|x-4|+|3x+5|\geqslant 16$.

√ **48.** $x^2-6x+8+|x-4|=0$.

49. $\dfrac{|2-x|-x}{|x-3|-1}\leqslant 2$.

√ **50.** $\dfrac{3}{|x+3|-1}\geqslant |x+2|$.

√ **51.** $\begin{cases}2|x-2|+3|y+1|=4\\ 2x-y=3.\end{cases}$

52*. $|x^2+x-2|+|x+4|\leqslant x^2+2x+6$.

√ **53*.** При каждом a решить уравнение

$$|x+3|-a|x-1|=4.$$

54*. При каждом a решить уравнение

$$|x+2|+a|x-4|=6.$$

§ 11. Использование свойств модулей

Большинство задач этого параграфа можно решить, бездумно раскрывая модули. Однако можно добиться существенного упрощения технической части решения, если вовремя замечать и использовать различные свойства модулей, приведённые в преамбуле этой главы.

Пример. $\dfrac{5-4x}{|x-2|}\leqslant |2-x|$.

Решение. $\ldots \iff 5-4x\leqslant (x-2)^2\neq 0 \iff$

$$\iff \begin{cases}x^2\geqslant 1\\ x\neq 2\end{cases} \iff \left[\begin{array}{l}x\leqslant -1\\ 1\leqslant x\neq 2.\end{array}\right.$$

Ответ: $(-\infty,-1]\cup[1,2)\cup(2,\infty)$.

В разобранном примере мы умножили неравенство на знаменатель, положительный при условии[1] $x \neq 2$. Это позволило „склеить" модули и, воспользовавшись свойством $|a|^2 = a^2$, сразу от них избавиться.

Упомянутое свойство может быть полезно при решении уравнений и неравенств, квадратных относительно модуля.

Пример. $x^2 + 2|x| < 8$.

Решение. $\ldots \iff (|x|-2)(|x|+4) < 0 \iff |x| < 2 \iff \ldots$

Ответ: $(-2, 2)$.

Иногда в таких случаях делают замену $|x| = y$, выписывают[2] полученное квадратное уравнение (неравенство), решают его и делают обратную замену. Нам представляется более рациональным все *промежуточные* выкладки делать на черновике[3], а в чистовике оставлять только одно разложение на множители (тогда и замена никакая не нужна). Точно так же мы рекомендовали поступать в § 8 при разложении многочленов на множители. Этот метод удобен тем, что можно, не разрывая цепь равносильностей, сразу перейти к более простому для исследования выражению (и к тому же без всяких обоснований). Так, мы не стали исследовать знак множителя $|x| + 4$, а поделили на него, поскольку он всюду положителен.

Из свойства $|a|^2 = a^2$ следует свойство *сопряжённых* модулей $|a| - |b|$ и $|a| + |b|$. Полезно помнить, что при умножении таких выражений модули исчезают:

$$(|a| - |b|)(|a| + |b|) = |a|^2 - |b|^2 = a^2 - b^2 = (a - b)(a + b).$$

Пример. $\dfrac{|x-4| - |x-1|}{|x-3| - |x-2|} < \dfrac{|x-3| + |x-2|}{|x-4|}$.

„Лобовое" решение заключается в разборе пяти (!) случаев, и потому в нём легко допустить ошибку (например, в знаках). Мы поступим иначе.

Решение.

$$\ldots \iff \frac{(x-4)^2 - (x-1)^2}{(x-3)^2 - (x-2)^2} < \frac{(|x-3| + |x-2|)(|x-4| + |x-1|)}{|x-4|(|x-3| + |x-2|)},$$

[1]Это условие вытекало из исходного неравенства, но после исчезновения знаменателя перестало действовать, поэтому было тут же восстановлено.

[2]Ещё раз!

[3]Если в этом, вообще, есть необходимость.

т. к. $\dfrac{|x-4|+|x-1|}{|x-3|+|x-2|} > 0, \quad \Longleftrightarrow \quad \dfrac{-3(2x-5)}{-(2x-5)} < \dfrac{|x-4|+|x-1|}{|x-4|} \quad \Longleftrightarrow$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3|x-4| < |x-4|+|x-1| \\ x \neq \frac{5}{2}, 4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} (2x-8)^2 < (x-1)^2 \\ x \neq \frac{5}{2}, 4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow$$

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3(x-3)(x-7) < 0 \\ x \neq \frac{5}{2}, 4 \end{cases} \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 3 < x < 7 \\ x \neq 4. \end{cases}$$

Ответ: $(3,4) \cup (4,7)$.

Неравенства с модулями такие, как $|a| \geqslant 0$, $|a| \geqslant a$, $|a+b| \leqslant |a|+|b|$, $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$ и др., часто служат основой для разного рода оценок, используемых в так называемых *экстремальных* задачах. В связи с этим непраздным является вопрос о достижимости равенства в упомянутых нестрогих неравенствах.

Пример. Найти все a, при которых неравенство $|a| \geqslant a$ обращается в равенство.

Решение. $\quad |a| = a \quad \Longleftrightarrow \quad a \geqslant 0.$

Ответ: $a \geqslant 0$.

Пример. $\big||x-1|-|x+2|\big| \geqslant |x|+3$. $(*)$

Решение. 1. Т. к. $\forall x$ $\big||x-1|-|x+2|\big| \leqslant |(x-1)-(x+2)| = 3 \leqslant |x|+3$, то для выполнения $(*)$ необходимо $x=0$ (чтобы $3 = |x|+3$).

2. Проверка показывает, что $x=0$ является решением $(*)$.

Ответ: $\{0\}$.

Можно было написать короче:

$$\big||x-1|-|x+2|\big| \geqslant |x|+3 \quad \Longrightarrow \quad 3 = |(x-1)-(x+2)| \geqslant |x|+3 \quad \Longrightarrow$$
$$\Longrightarrow \quad x = 0 \quad \Longrightarrow \quad \big||x-1|-|x+2|\big| \geqslant |x|+3.$$

Задачи

55°. $(x-7)^2 - |x-7| = 30$.

√ **56°.** $x^2 - 6 \geqslant |x|$.

57. $(4|x-1|+\frac{1}{2})^2 = 11(x-1)^2 + \frac{5}{4}$.

√ **58*.** При каждом a найти число корней уравнения

$$x^2 - (a+1)|x| + a = 0.$$

√ **59*.** $\dfrac{|x-5|-|x+4|}{|x-2|-|x+1|} < \dfrac{|x-2|+|x+1|}{|x+4|}$.

60. Изобразить на координатной плоскости Oab множество всех точек, координаты которых обращают следующие неравенства в равенства.
а) $|a+b| \leqslant |a|+|b|$.
√ б) $\big||a|-|b|\big| \leqslant |a-b|$.

61★. $|x-1|+|x+1|+|x-2|+|x+2|+\ldots+|x-100|+|x+100| = 200x$.

62★. Для любого a решить уравнение

$$|a^3+a^2x|+|a^2x+1| = 1-a^3.$$

§ 12. Геометрический смысл модуля

Геометрическая интерпретация выражения $|a-b|$ как расстояния на числовой оси между точками a и b позволяет решать задачи определённого типа графически, почти без выкладок.

Пример. $|x-1|+|x+1| = 2$.

Решение. Левая часть уравнения $|x-1|+|x-(-1)|$ есть сумма расстояний от точки x до точек 1 и -1. Она равна $1-(-1)=2$, если точка x лежит на отрезке $[-1,1]$ (см. рис. 8), и больше 2, если точка x лежит вне этого отрезка, когда уже расстояние от x до дальней из точек ±1 больше 2.

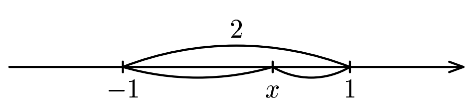

Рис. 8

Ответ: $[-1,1]$.

Пример. $|x-3|+|x+5| > 10$.

Решение. Чтобы $L = |x-3|+|x+5|$ было больше 10, необходимо и достаточно, чтобы точка x лежала вне отрезка $[-5,3]$ (иначе $L = 5-(-3) = 8 < 10$) и была удалена от ближнего его конца более чем на $\frac{10-8}{2} = 1$, т. к. в этом случае L равно длине отрезка $[-5,3]$ плюс удвоенное расстояние от x до ближнего его конца (см. рис. 9).

Ответ: $(-\infty,-6)\cup(4,+\infty)$.

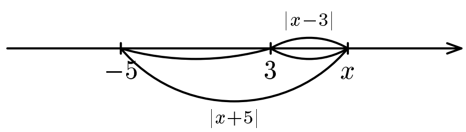

Рис. 9

Пример. $\big||x-1|-|3-x|\big|<1$.

Решение. Геометрический смысл левой части — разница между расстояниями от x до 1 и 3. Для всех $x\notin[1,3]$ эта разница равна $3-1>1$, а для всех $x\in[1,3]$ она равна удвоенному расстоянию до середины — точки $\frac{3+1}{2}=2$ (см. рис. 10). Значит, меньше $1=2\cdot\frac{1}{2}$ она будет в точности на интервале $(2-\frac{1}{2},2+\frac{1}{2})$.

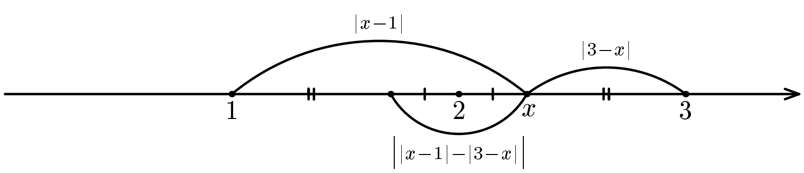

Рис. 10

Ответ: $(\frac{3}{2},\frac{5}{2})$.

Задачи

63°. $|2x-15|=22-|2x+7|$.

√ **64°.** $|5x-13|-|6-5x|=7$.

65. $|x-6|+|x+2|\geqslant 12$.

√ **66.** $|x-6|-|x+2|\geqslant 4$.

√ **67*.** Найти все a, при которых уравнение

$$|x^2-ax+22|-|x^2-ax+8|=12$$

имеет единственное решение.

68★. Найти все x, при которых хотя бы одно из выражений

$$|x-3|(|x-5|-|x-3|)-6x \quad \text{и} \quad |x|(|x|-|x-8|)+24$$

неположительно, а его модуль не меньше модуля другого.

§ 13. Привлечение функций и графиков

Задачи этого параграфа довольно трудно[1] решить методами, изложенными выше. Трудность представляет техническая сторона решения. Однако, как мы уже отмечали ранее (см. главу 1), арифметику можно свести к минимуму за счёт более рациональной логики и, в частности, за счёт использования *более мощного аппарата.* Здесь мы понимаем под этим введение в рассмотрение абстрактных функций, изучение их свойств и графиков.

Предварительно введём важное понятие *монотонности* функций.

Определение. Пусть множество M содержится в области определения функции f. Тогда говорят, что
функция f строго возрастает на множестве M $\iff$ для всех $x_1, x_2 \in M$

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) < f(x_2); \tag{14}$$

функция f строго убывает на множестве M $\iff$ для всех $x_1, x_2 \in M$

$$x_1 < x_2 \Longrightarrow f(x_1) > f(x_2). \tag{15}$$

Если все неравенства в (14) и (15) заменить нестрогими, то получатся определения нестрого возрастающей и нестрого убывающей функций.

Возрастающие и убывающие функции называют монотонными.

Замечание. Константа является монотонной функцией (она нестрого возрастает и нестрого убывает).

Пример 1. Линейная функция $f_{a,b}(x) = ax + b$

$$\begin{aligned} \text{строго возрастает} \quad &\iff \quad a > 0, \\ \text{строго убывает} \quad &\iff \quad a < 0, \\ \text{константа} \quad &\iff \quad a = 0. \end{aligned}$$

Пример 2. Квадратичная функция $f_{p,q}(x) = x^2 + px + q$ строго возрастает на луче $[-p/2, +\infty)$ и строго убывает на луче $(-\infty, -p/2]$.

Пример. Найти все a, при которых уравнение

$$|x - a_1| + \ldots + |x - a_{100}| = a,$$

где $a_1 < \ldots < a_{100}$ — некоторые числа, имеет
а) хотя бы один корень;

[1] Если, вообще, возможно.

б) ровно один корень;
в) ровно два корня;
г) ровно три корня;
д) бесконечно много корней.

Решение. Рассмотрим функцию

$$f(x) = |x - a_1| + \ldots + |x - a_{100}|$$

и найдём её область значений $E(f)$. Для этого исследуем её на монотонность.

Функция f является кусочно-линейной: она линейна (а значит, монотонна) на каждом из промежутков $(-\infty, a_1]$, $[a_1, a_2]$, $\ldots$, $[a_{99}, a_{100}]$, $[a_{100}, +\infty)$. На отрезке $[a_{50}, a_{51}]$ первые 50 модулей раскрываются со знаком „+", а последние 50 — со знаком „−", следовательно, коэффициент при x на этом отрезке равен 0, а функция f — константа, равная $A = (a_{51} + \ldots + a_{100}) - (a_1 + \ldots + a_{50})$. Соответственно, на луче $[a_{51}, +\infty)$ функция f строго возрастает от A до $+\infty$ (коэффициент при x положительный), а на $(-\infty, a_{50}]$ — строго убывает от $+\infty$ до A (коэффициент при x отрицательный). Отсюда заключаем, что $E(f) = [A, +\infty)$, причём значение A принимается бесконечно много раз (на отрезке $[a_{50}, a_{51}]$), а каждое значение $y > A$ — ровно два раза (по одному разу на каждом из лучей $(-\infty, a_{50}]$ и $[a_{51}, +\infty)$) (см. эскиз графика функции f на рис. 11).

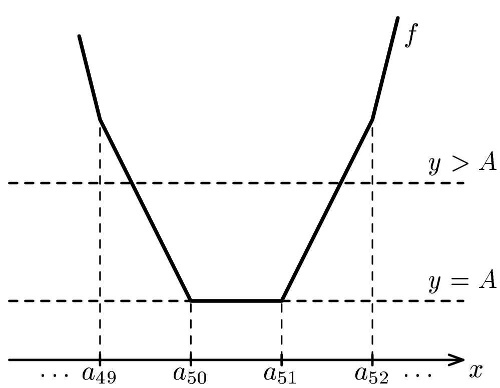

Рис. 11

Ответ: а) $a \geqslant A$; б), г) $a \in \varnothing$; в) $a > A$; д) $a = A$, где $A = (a_{51} + \ldots + a_{100}) - (a_1 + \ldots + a_{50})$.

Пример. Найти все a, при которых уравнение

$$5|x-3a|+|x-a^2|+4x=a$$

а) имеет бесконечно много корней;
б) не имеет корней.

Решение. Введём функцию

$$f_a(x)=5|x-3a|+|x-a^2|+4x-a.$$

Точки $3a$ и a^2 разбивают числовую ось на промежутки, на каждом из которых функция f_a линейна.

а) На каком-нибудь из этих промежутков функция f_a должна быть константой (причём нулевой — тогда и только тогда уравнение $f_a(x)=$ $=0$ будет иметь бесконечно много корней), т. е. коэффициент при x на каком-нибудь промежутке должен быть равен нулю. Но этот коэффициент на каждом таком промежутке равен одному из четырёх чисел: $\pm5\pm1+4$, из которых нулю равно только $-5+1+4$, что соответствует такому способу раскрытия модулей: $|x-3a|=-x+3a, |x-a^2|=x-a^2$. Значит, $a^2<3a$ и функция f_a постоянна на отрезке $[a^2,3a]$ (см. рис. 12).

Осталось потребовать, чтобы функция f_a принимала бы на этом отрезке (т. е. в любой его точке) нулевое значение. Итак,

$$a \text{ — искомое} \iff \begin{cases} a(a-3)<0 \\ f_a(3a)=a(14-a)=0 \end{cases} \iff a\in\varnothing.$$

б) Найдём $E(f_a)$. Т. к. на левом луче ($x\leqslant 3a$ и $x\leqslant a^2$) функция f_a строго убывает, на правом луче ($x\geqslant 3a$ и $x\geqslant a^2$) — строго возрастает, а между точками[1] a^2 и $3a$ — константа в случае $a^2\leqslant 3a$ и строго возрастает в случае $3a\leqslant a^2$ (снова см. рис. 12), то минимальное значение функции f_a равно $f_a(3a)=a(a+8)$, и, в силу её кусочной линейности, заключаем, что $E(f_a)=[a(a+8),+\infty)$. Имеем

$$a \text{ — искомое} \iff 0\notin E(f_a) \iff a(a+8)>0 \iff \ldots$$

Ответ: а) $a\in\varnothing$; б) $a<-8$, $a>0$.

[1]Возможно, $a^2=3a$.

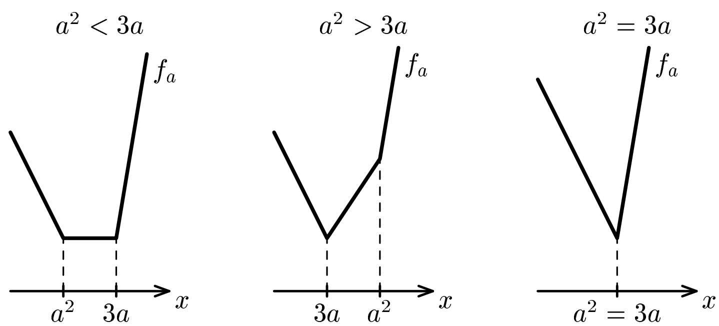

Рис. 12

Задачи

69°. Найти наименьшее значение функции

$$f(x) = 2|x - 3| + |3x - 2|.$$

70. Найти наименьшее и наибольшее значения функции

$$f(x) = |x^2 + x| + |x^2 + 5x + 6|$$

на отрезке $[-2{,}5,\ 0{,}5]$.

√ **71.** Найти все a, при которых уравнение

$$|x - a_1| + \ldots + |x - a_{101}| = a,$$

где $a_1 < \ldots < a_{101}$ — некоторые числа, имеет
а) хотя бы один корень;
б) ровно один корень;
в) ровно два корня;
г) ровно три корня;
д) бесконечно много корней.

√ **72*.** Найти все a, при которых уравнение

$$|x^2 - 1| + |x^2 - x - 2| = x^2 + 3x + a$$

имеет ровно три корня.

73*. Найти все a, при которых уравнение

$$4x - \big|3x - |x+a|\big| = 9|x-1|$$

имеет ровно один корень.

74*. Сумма модулей членов конечной арифметической прогрессии равна 100. Если все её члены увеличить на 1 или все её члены увеличить на 2, то в обоих случаях сумма модулей членов полученной прогрессии будет также равна 100. Какие значения при этих условиях может принимать величина $n^2 d$, где d — разность прогрессии, а n — число её членов?

75*. Найти все пары (a, n), при которых разница между наибольшим и наименьшим положительными корнями уравнения

$$\underbrace{||\ldots|||}_{n\ \text{скобок}}x - 1| - 1| - 1| - \ldots - 1| - 1| = a$$

равна 18,3.

Глава 4

Иррациональные уравнения и неравенства

Напомним определение корня и его основные свойства.

Определение. 1. Пусть даны $n \in \mathbb{N}$ и $a \geqslant 0$.
Арифметическим корнем n-й степени из a называется такое $b \geqslant 0$, что

$$b^n = a.$$

Арифметический корень n-й степени из a обозначается символом $\sqrt[n]{a}$.

2. Пусть даны $n \in \mathbb{N}$ и $a < 0$. Тогда

$$\sqrt[2n-1]{a} = -\sqrt[2n-1]{-a}.$$

Таким образом, корни нечётных степеней можно извлекать из любых действительных чисел, а корни чётных степеней — только из неотрицательных.

Из определения корня вытекают следующие его основные свойства[1]:

1) $\sqrt[n]{a}\sqrt[n]{b} = \sqrt[n]{ab}$;
2) $\dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}} = \sqrt[n]{\dfrac{a}{b}}$;
3) $\sqrt[2n-1]{a^{2n-1}} = \left(\sqrt[2n-1]{a}\right)^{2n-1} = a$;
4) $\sqrt[2n]{a^{2n}} = |a|$;
5) $\left(\sqrt[2n]{a}\right)^{2n} = a$;
6) $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$.

[1]Все ниже приведённые равенства рассматриваются только при тех значениях переменных, при которых определены обе их части.

Графики функций $\sqrt[n]{}$ при чётных и нечётных $n > 1$ изображены на рис. 13.

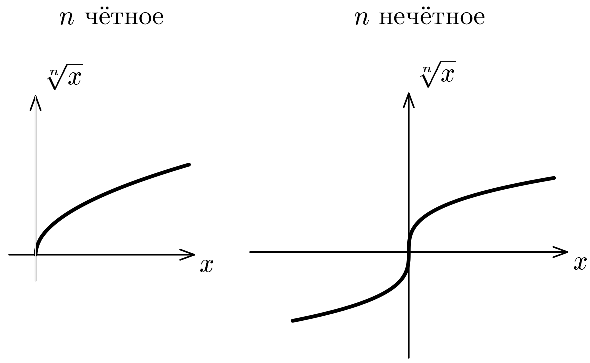

Рис. 13

§ 14. Отбрасывание корней

Из определения корня мгновенно вытекают следующие *универсальные*[1] равносильности, при помощи которых отбрасываются корни в простейших случаях.

1. $T = \sqrt[2n]{U} \iff \begin{cases} T \geqslant 0 \\ T^{2n} = U. \end{cases}$

1′. $T = \sqrt[2n-1]{U} \iff T^{2n-1} = U.$

Пример. $\sqrt{8 - 3x^2} = 1.$

Решение. $\ldots \iff 8 - 3x^2 = 1 \iff x^2 = \frac{7}{3} \iff \ldots$

Ответ: $x = \pm\sqrt{\frac{7}{3}}.$

Из строгого возрастания функции $\sqrt[n]{}$ вытекают следующие равносильности.

2. $\sqrt[2n]{T} \vee \sqrt[2n]{U} \iff \begin{cases} T,\ U \geqslant 0 \\ T \vee U. \end{cases}$

2′. $\sqrt[2n-1]{T} \vee \sqrt[2n-1]{U} \iff T \vee U.$

[1] Т. е. истинные при всех значениях переменных.

В п. 2 из неравенств $T \geqslant 0$ и $U \geqslant 0$ нужно учитывать только одно (в зависимости от знака неравенства $T \vee U$).

Пример. $\sqrt{x^2-4}=\sqrt{x-2}$.

Решение. $\ldots \iff (x-2)(x+2)=x-2 \geqslant 0 \iff \left[\begin{array}{l} x=2 \\ \begin{cases} x+2=1 \\ x \geqslant 2. \end{cases} \end{array}\right.$

Ответ: $\{2\}$.

Пример. $\sqrt{2x+3} \leqslant 2$.

Решение. $\ldots \iff 0 \leqslant 2x+3 \leqslant 4 \iff \ldots$

Ответ: $\left[-\frac{3}{2}, \frac{1}{2}\right]$.

В § 4 мы уже говорили о бессмысленности выписывания ОДЗ перед началом решения. Сейчас задачи стали сложнее, а проблема изменения ОДЗ возникает всё чаще, поэтому нелишним будет привести ещё один пример на эту тему.

Пример. Решить уравнение $\sqrt{2x^2-8x+7}=x$.

„Решение”. Возведём уравнение в квадрат. Получим $2x^2-8x+7=x^2$; $x^2-8x+7=0$, откуда $x=1$ или $x=7$.

ОДЗ: $2x^2-8x+7 \geqslant 0$
Найдём корни трёхчлена $2x^2-8x+7$:
$D_1=4^2-2\cdot 7=2$; $x_{1,2}=\dfrac{4\pm\sqrt{2}}{2}$.
$x \in \left(-\infty, \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}\right] \cup \left[\dfrac{4+\sqrt{2}}{2}, +\infty\right)$.

Проверка:
$1 < \dfrac{4-\sqrt{2}}{2}$, т. к. $\sqrt{2} > 1$;
$7 > \dfrac{4+\sqrt{2}}{2}$, т. к. $\sqrt{2} < 2$.

Ответ: 1, 7.

Подведём итог. Решено одно квадратное неравенство, одно квадратное уравнение, произведены две числовые оценки. В результате получен правильный ответ, но задача не решена. Дело в том, что необходимое неравенство $x \geqslant 0$ учтено не было, а потому возведение в квадрат привело к следствию, которое лишь *случайно* оказалось равносильно исходному уравнению. Таким образом, равносильность перехода **не доказана**. Это обстоятельство является единственным, но достаточным основанием не засчитать задачу. Приведённое решение можно спасти, если корни 1 и 7 подставить в исходное уравнение, а не в его ОДЗ. В таком случае равносильность (4), о которой шла речь в главе 1, будет доказана.

Заметим, что куда более сложное (чем исходное уравнение) неравенство $2x^2 - 8x + 7 \geqslant 0$ оказалось совершенно бесполезным (а стало быть, и последующая проверка найденных корней на вхождение их в ОДЗ), что неудивительно, так как оно вытекает из уравнения $2x^2 - 8x + 7 = x^2$.

Для сравнения приведём правильное решение этого примера.

Решение. $$\ldots \iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ 2x^2 - 8x + 7 = x^2 \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} x \geqslant 0 \\ (x-1)(x-7) = 0 \end{cases} \iff \ldots$$

Ответ: $\{1, 7\}$.

Задачи

76°. $\sqrt{9x^2 - 3} > 1$.

77°. $\sqrt{9 + 6x} > \sqrt{2 - x}$.

78°. $\sqrt{|x+1| - 1} > \sqrt{|x+1| - 97}$.

79°. $\sqrt{13 - 2x} = 5 - x$.

80°. $\sqrt{3x - 5} = x - 11$.

81°. $\sqrt{7 + \sqrt{3 + x}} = 4$.

82°. $\sqrt{6 - 4x - x^2} = x + 4$.

83°. $x + \sqrt{2x^2 - 14x + 13} = 5 - 2x$.

84. $\sqrt{2x^2 - 8x + 5} = x - 2$.

85. $\sqrt{3x - x^2 - 2} = 2x - 3$.

86. $\sqrt{x^4 - 2x - 5} = 1 - x$.

87*. $\frac{1}{2} - x^2 = \sqrt{\frac{1}{2} - x}$.

88*. $\sqrt{|x^2 + 14x + 47| - 1} = |x + 7| - 1$.

89*. $3\sqrt{|x+1| - 3} \geqslant \sqrt{x^2 - 2x - 3}$.

§ 15. Возведение в степень[1]

Стандартным способом избавления от радикала является возведение его в соответствующую[2] степень. При этом следует иметь в виду следующие соображения.

1. В нечётную степень можно возводить любые уравнения и неравенства — переход будет равносильным, т. к. соответствующая степенная функция строго возрастает на всей прямой:

$$T \vee U \quad \Longleftrightarrow \quad T^{2n-1} \vee U^{2n-1}.$$

2. Возводить в квадрат[3] уравнение (неравенство) можно, только если обе его части неотрицательны[4]. Несоблюдение этого основного правила часто приводит к неравносильному[5] переходу. Поясним сказанное на простейших примерах.

Пример 1. Если возвести в квадрат заведомо ложное равенство $-1 = 1$, то получится истинное следствие $(-1)^2 = 1^2$.

Пример 2. При возведении в квадрат уравнения $x = 1$ получается уравнение $x^2 = 1$, имеющее ещё один корень -1.

Вообще, из равенства $a = b$ следует равенство $a^2 = b^2$, а потому возведение уравнения в квадрат всегда приводит к уравнению-следствию, не обязательно равносильному исходному.

Пример 3. Из неравенства $x > 1$ следует неравенство $x^2 > 1$, но не наоборот, т. к. последнему удовлетворяют также и значения $x < -1$.

Пример 4. Возведя в квадрат истинное неравенство $1 > -2$, получим ложное $(-1)^2 > 2^2$.

Пример 5. Если возвести в квадрат неравенство $x > -1$, то потеряются решения из промежутка $(-1, 1]$, зато появится целый луч лишних решений $(-\infty, -1)$.

Пример 3 показывает, что при возведении неравенств в квадрат решения могут приобретаться, пример 4 — что теряться, а пример 5 — что и приобретаться, и теряться одновременно.

[1] Натуральную.
[2] Степени этого радикала.
[3] Или в любую другую чётную степень.
[4] На самом деле — одного знака, однако, если они обе отрицательны, лучше сперва домножить уравнение (неравенство) на -1.
[5] А если и равносильному, то необоснованному!

3. Даже после успешного возведения в квадрат нужно быть бдительным: нельзя забывать про ОДЗ, которая может меняться в процессе преобразований. Напомним, что при расширении ОДЗ нужно включать в систему условия, которые раньше выполнялись автоматически, но теперь перестали действовать.

Пример. Рассмотрим равенство $\left(\sqrt{T}\right)^2 = T$. Если его левая часть определена, то она равна правой, но не наоборот, поскольку не всякое T можно представить в виде $\left(\sqrt{T}\right)^2$, а только неотрицательное. Поэтому при использовании этой формулы слева направо следует, вообще говоря, добавлять ограничение $T \geqslant 0$.

Теперь мы знаем, какие опасности нас подстерегают, и можем начать исследование стандартных неравенств вида[1]

$$\sqrt{T} \vee U. \tag{16}$$

Левая часть (16) уже неотрицательна на ОДЗ. Что касается правой части, то она может быть, вообще говоря, любого знака, поэтому рассмотрим два случая.

1. $U \geqslant 0$. Тогда (16) можно возвести в квадрат:

$$(16) \quad \Longleftrightarrow \quad \left(\sqrt{T}\right)^2 \vee U^2 \quad \Longleftrightarrow \quad 0 \leqslant T \vee U^2.$$

2. $U < 0$. Тогда если неравенство имеет вид $\sqrt{T} < U$ или $\sqrt{T} \leqslant U$, то этот случай явно невозможен, а в случае обратных неравенств его надо разобрать отдельно. Легко видеть, что тогда

$$(16) \quad \Longleftrightarrow \quad T \geqslant 0.$$

Таким образом, мы получаем следующие равносильности[2].

3. $\sqrt{T} < U \quad \Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 0 \leqslant T < U^2 \\ U \geqslant 0. \end{cases}$

4. $\sqrt{T} > U \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} U < 0 \\ T \geqslant 0 \end{cases} \\ \begin{cases} U \geqslant 0 \\ T > U^2 \end{cases} \end{array}\right. \quad \Longleftrightarrow \quad \left[\begin{array}{l} \begin{cases} U < 0 \\ T \geqslant 0 \end{cases} \\ T > U^2. \end{array}\right.$

[1]С корнями нечётных степеней всё ясно, а корни произвольной чётной степени рассматриваются аналогично квадратным корням.

[2]Мы рассмотрели только строгие неравенства. Аналогичные равносильности для нестрогих неравенств выведите самостоятельно.

При последнем переходе мы выкинули из второй системы неравенство $U \geqslant 0$. Из-за этого множество решений совокупности могло разве лишь расшириться — засчёт решений системы $\begin{cases} U < 0 \\ T > U^2, \end{cases}$ но этого не произошло, т. к. все эти решения удовлетворяют системе $\begin{cases} U < 0 \\ T \geqslant 0, \end{cases}$ оставшейся в совокупности.

Случай $\sqrt{T} = U$ был рассмотрен в предыдущем параграфе при помощи определения корня, а случай $\sqrt{T} \neq U$ будет разобран в одном из примеров § 16. (Запись $V \neq W$ означает, что выражения V и W определены, но не равны.)

Пример. $\sqrt{2x^2 + 15x - 17} > x + 3$.

Решение. $\ldots \iff \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x + 3 < 0 \quad (\Rightarrow x - 1 < 0) \\ (x-1)(2x+17) \geqslant 0 \end{cases} \\ 2x^2 + 15x - 17 > x^2 + 6x + 9 \end{array}\right. \iff$

$$\iff \left[\begin{array}{l} x \leqslant -\frac{17}{2} \\ f(x) = x^2 + 9x - 26 = (x - x_1)(x - x_2) > 0, \end{array}\right.$$

где $x_{1,2} = \frac{-9 \pm \sqrt{185}}{2}$, причём $x_1 < -\frac{17}{2} < x_2$,
т. к. $f(-\frac{17}{2}) = \frac{17^2}{4} - \frac{9 \cdot 17}{2} - 26 < 0$ (см. рис. 14), $\iff \quad \ldots$

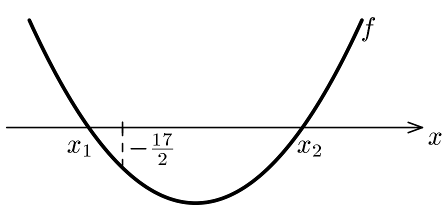

Рис. 14

Ответ: $\left(-\infty, -\frac{17}{2}\right] \cup \left(\frac{\sqrt{185}-9}{2}, +\infty\right)$.

Обратите внимание на оригинальный способ сравнения корней $x_{1,2}$ с числом $-\frac{17}{2}$, основанный на свойствах параболы.

Пример. $\sqrt{x^2 + x - 2} < x$.

Обратим внимание читателя на стандартное в таких случаях ошибочное рассуждение: „Левая часть неотрицательна, а правая её больше, поэтому тоже неотрицательна, значит, неравенство можно возводить в квадрат". Логическая ошибка[1] в этом рассуждении заключается в следующем. Правая часть неотрицательна *не сама по себе,* а только *в силу неравенства*, в котором она больше неотрицательной величины. После возведения в квадрат эта информация бесследно теряется, а потому переход в обратную сторону может оказаться неверным. Чтобы лучше это понять, рассмотрим тривиальный пример. Совершенно очевидно, что неравенство $-2 > 1$ нельзя возводить в квадрат, поскольку его части разных знаков. С другой стороны, $1 > 0$, а $-2 > 1$ (по условию), т. е. обе части положительны и неравенство можно возводить в квадрат, получая $(-2)^2 > 1^2$, что уже верно.

Тем не менее, приведённое рассуждение можно довести до логического конца. Для этого условие неотрицательности правой части нужно сперва добавить в систему к неравенству как следствие и только потом пользоваться им по праву.

Отметим, что всех этих логических трудностей можно избежать, если действовать по алгоритму, приведённому в преамбуле этого параграфа, а именно, разобрать два случая: когда правая часть неотрицательна (тогда неравенство можно возводить в квадрат) и когда отрицательна (тогда этого делать нельзя и не нужно).

Решение. $$\ldots \iff \begin{cases} 0 \leqslant (x-1)(x+2) = x^2 + x - 2 < x^2 \\ x > 0 \quad (\Rightarrow x+2 > 0) \end{cases} \iff$$
$$\iff \begin{cases} 0 < x < 2 \\ x \geqslant 1 \end{cases} \iff \ldots$$

Ответ: $[1, 2)$.

Пример. $\dfrac{1}{\sqrt{3-x}} > \dfrac{1}{x-2}$.

В примере на с. 26 мы уже „опрокидывали" дроби, но там на ОДЗ были положительны обе части неравенства, а тут — только одна.

Решение. Рассмотрим два случая:

1) $x - 2 < 0: \quad 3 - x > 0 \iff x < 2;$

2) $x - 2 > 0: \quad 0 < \sqrt{3-x} < x - 2 \iff$
$$\iff 0 < 3 - x < x^2 - 4x + 4 \iff$$

[1] Довольно тонкая!

$$\Longleftrightarrow \quad \begin{cases} 2 < x < 3 \\ f(x) = x^2 - 3x + 1 = (x - x_1)(x - x_2) > 0, \end{cases}$$

где $x_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2}$, причём $x_1 < 2 < x_2 < 3$,
т. к. $f(2) = 2^2 - 2 \cdot 3 + 1 < 0$, $f(3) = 3^2 - 3^2 + 1 > 0$ (см. рис. 15), $\Longleftrightarrow \quad \ldots$

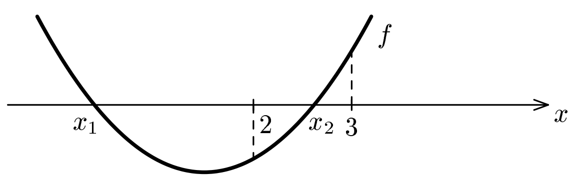

Рис. 15

Ответ: $(-\infty, 2) \cup \left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}, 3\right)$.

Если в уравнении или неравенстве стоит сумма (разность) нескольких корней, то перед возведением его в квадрат бывает полезно[1] перенести какие-то слагаемые в другую часть. Удачная перегруппировка часто упрощает не только техническую, но и логическую сторону решения. При этом могут оказаться полезными следующие советы.

1. Для упрощения логической части решения старайтесь добиться неотрицательности (на ОДЗ) обеих частей уравнения (неравенства). Тогда при возведении в квадрат переход будет равносильным без дополнительных ограничений.

2. Для упрощения технической части решения группируйте члены так, чтобы после каждого возведения в квадрат число радикалов уменьшалось. Перед возведением в квадрат не рекомендуется оставлять в одной части слишком много[2] корней. Посмотрите заранее, не сократятся ли в процессе преобразований какие-нибудь дроби или не уничтожатся ли какие-нибудь слагаемые. Вообще, оцените техническую сложность полученного уравнения (неравенства).

Пример. $\sqrt{x+1} - \sqrt{4x-3} = 1$.

Уединим один из радикалов, чтобы обе части стали неотрицательны на ОДЗ.

---

[1] А иногда — необходимо.

[2] Три — уже много!

Решение. $\ldots \iff \sqrt{x+1} = \sqrt{4x-3} + 1 \iff$

$$\iff x+1 = 4x-3+2\sqrt{4x-3}+1 \iff$$

$$\iff 2\sqrt{4x-3} = 3-3x \iff$$

$$\iff \begin{cases} 3(1-x) \geqslant 0 \\ 4(4x-3) = 9-18x+9x^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x \leqslant 1 \ (\Rightarrow x-3<0) \\ (x-3)(x-7/9) = 0 \end{cases} \iff \ldots$$

Ответ: $x = 7/9$.

Заметим, что после второго перехода ОДЗ могла расшириться[1], поскольку из-за исчезновения радикала пропало ограничение $x+1 \geqslant 0$, однако в силу полученного уравнения выражение $x+1$ равно квадрату выражения $\sqrt{4x-3}+1$, а потому неотрицательно. Можно было рассуждать иначе: мы избавились от корня из $x+1$ по определению. Тогда единственное ограничение, которое надо было учесть ($\sqrt{4x-3}+1 \geqslant 0$), выполнено на ОДЗ автоматически.

Отметим также, что если бы мы возвели в квадрат исходное уравнение, то нам бы пришлось учитывать неравенство $\sqrt{x+1} > \sqrt{4x-3}$.

Пример. $\dfrac{1}{\sqrt{x+2}} + \sqrt{x+2} = \sqrt{3x+1}$.

Здесь проще всего сразу возвести в квадрат: во-первых, обе части уже неотрицательны на ОДЗ, а во-вторых, после возведения в квадрат сократятся множители $\frac{1}{\sqrt{x+2}}$ и $\sqrt{x+2}$.

Решение. $\ldots \iff \begin{cases} x+2>0 \\ \dfrac{1}{x+2} + 2 + x + 2 = 3x+1 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x > -2 \\ f(x) = (2x-3)(x+2) - 1 = 0 \end{cases} \iff$$

$$\iff x = x_{1,2} = \tfrac{-1\pm\sqrt{57}}{4} > -2 \iff$$

$$\iff x = \tfrac{-1+\sqrt{57}}{4},$$

т. к. $x_1 < -2 < x_2$ ввиду $f(-2) = -1 < 0$.

Ответ: $x = \frac{-1+\sqrt{57}}{4}$.

[1] Но не расширилась, т. к. осталось более сильное условие $4x-3 \geqslant 0$.

Пример. $\sqrt{1-x}-\sqrt{x}>\frac{1}{\sqrt{3}}$.

Сразу возведём в квадрат, чтобы уничтожились слагаемые $-x$ и x.

Решение. $\ldots \iff \begin{cases} \sqrt{1-x}>\sqrt{x} \\ 1-x+2\sqrt{1-x}\sqrt{x}+x>\frac{1}{3} \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} 1-x>x\geqslant 0 \\ \sqrt{x-x^2}<\frac{1}{3} \end{cases} \iff \begin{cases} 0\leqslant x<\frac{1}{2} \\ x-x^2<\frac{1}{9} \end{cases} \iff \begin{cases} 0\leqslant x<\frac{1}{2} \\ (x-x_1)(x-x_2)>0, \end{cases}$

где $0<x_1=\frac{3-\sqrt{5}}{2}<\frac{1}{2}<\frac{3+\sqrt{5}}{2}=x_2, \quad \iff \quad \ldots$

Ответ: $\left[0,\frac{3-\sqrt{5}}{6}\right)$.

Задачи

√ **90°.** $\sqrt{x^2-3x+2}\leqslant 3x-3$.

√ **91°.** $\sqrt{-x^2+6x-5}>8-2x$.

92°. $\sqrt{24-10x+x^2}>x-4$.

93°. $2x-5<\sqrt{x^2-x-6}$.

√ **94.** $\sqrt{10x-1}+1\leqslant 5x$.

√ **95.** $1-\sqrt{\dfrac{1-x}{7-4x}}\leqslant x$.

96★. $\sqrt{\dfrac{4x^7-10x^3}{4x-x^3-3}}\leqslant x^3$.

97. $\dfrac{5x-3}{\sqrt{7x-4}}<1$.

√ **98.** $\dfrac{\sqrt{x^2-5x+8}}{3-x}\geqslant 1$.

99. $\dfrac{\sqrt{x^2+x-6}+3x+13}{x+5}>1$.

100★. При каждом $a\geqslant 0$ решить неравенство

$$\frac{\sqrt{x^2-4}}{x}\leqslant a.$$

101★. При каждом a решить уравнение $\sqrt[3]{a+x}+\sqrt[3]{a-x}=\sqrt[3]{2a}$.

102. $\sqrt{x+2}+\sqrt{8-x}=\sqrt{15}$.

$\surd$ **103°.** $\sqrt{x+1}-\sqrt{2x-5}=\sqrt{x-2}$.

104. $\sqrt{x^2+3x+2}-\sqrt{x^2-x+1}<1$.

$\surd$ **105*.** $\sqrt{12-\dfrac{12}{x^2}}+\sqrt{x^2-\dfrac{12}{x^2}}=x^2$.

$\surd$ **106*.** $\sqrt{4x^2+9x+5}-\sqrt{2x^2+x-1}=\sqrt{x^2-1}$.

107*. $\sqrt{2x^2+5x+3}-\sqrt{x^2-x-2}=\sqrt{2x^2-2}$.

108★. $\sqrt{4x-x^2-3}\geqslant\sqrt{x^2-7x+12}-\sqrt{x^2-5x+6}$.

§ 16. Использование свойств корней

1. Учёт ОДЗ. При использовании свойств корней, перечисленных в преамбуле этой главы, следует проявлять осторожность: бездумное применение многих из них может привести к неравносильному переходу. Как уже отмечалось выше, левые и правые части некоторых равенств (например, $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$) определены не одновременно, точнее область определения одной части шире области определения другой. Поэтому неаккуратное применение свойств корней может привести к расширению или сужению[1] ОДЗ и, соответственно, к аналогичным изменениям множества решений.

В последнем примере § 15 мы уже могли столкнуться[2] с проблемой расширения ОДЗ при „склеивании" корней $\sqrt{1-x}$ и $\sqrt{x}$.

Пример. $\sqrt{x+2}\sqrt{2x+1}=x+4$.

Решение. $\ldots \iff \begin{cases} 2x+1\geqslant 0\ (\Rightarrow x+2>0) \\ \sqrt{(x+2)(2x+1)}=x+4 \end{cases} \iff$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -1/2\ (\Rightarrow x+4>0) \\ (x+2)(2x+1)=(x+4)^2 \end{cases} \iff$$

$$\iff \begin{cases} x\geqslant -1/2 \\ x^2-3x-14=0 \end{cases} \iff$$

$$\iff \quad x=\tfrac{3\pm\sqrt{65}}{2}\geqslant-\tfrac{1}{2} \quad\iff\quad \ldots$$

Ответ: $x=\frac{3+\sqrt{65}}{2}$.

[1]В зависимости от того, в какую сторону применяется свойство.

[2]Но не столкнулись, поскольку в системе *уже* содержались условия неотрицательности подкоренных выражений.

В следующем примере, помимо всего прочего, используется свойство 4) (для $n = 2$) из преамбулы этой главы: $\sqrt{a^2} = |a|$.

Пример. $3\sqrt{x^2+2x+1} = 7 + x + (\sqrt{-x^2-5x-4})^2$.

Решение. $\ldots \iff \begin{cases} 3|x+1| = 7 + x + (-x^2 - 5x - 4) \\ -(x+1)(x+4) \geqslant 0 \ (\Rightarrow x + 1 \leqslant 0) \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} -4 \leqslant x \leqslant -1 \\ (x-2)(x+3) = 0 \end{cases} \iff \ldots$

Ответ: $\{-3\}$.

2. Замена переменной. При помощи свойства[1] $\left(\sqrt{a}\right)^2 = a$ $(a \geqslant 0)$ можно свести иррациональные уравнения и неравенства определённого вида к рациональным: от корня можно избавиться хотя бы временно, если обозначить его новой буквой.

Пример. $\sqrt{x+4} = x + 2$.

Решение. $\ldots \iff y = y^2 - 2, \quad \text{где } y = \sqrt{x+4}, \iff$

$\iff (y+1)(y-2) = 0 \iff y = 2 \iff \ldots$

Ответ: $x = 0$.

Выражения, квадратные относительно корня, иногда бывает удобнее сразу раскладывать на множители, обходясь без замены переменной.

Пример. $\begin{cases} x + y + \sqrt{x+y} = 30 \\ x^2 + y^2 = 325 \end{cases}$

Решение. $\ldots \iff \begin{cases} (\sqrt{x+y} - 5)(\sqrt{x+y} + 6) = 0 \\ (x+y)^2 - 2xy = 325 \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} \sqrt{x+y} = 5 \\ xy = \dfrac{(x+y)^2 - 325}{2} \end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases} x + y = 25 \quad (= 15 + 10) \\ xy = 150 \quad (= 15 \cdot 10) \end{cases} \iff \ldots$

Ответ: $(x, y) \in \{(10, 15), (15, 10)\}$.

Последняя система в разобранном примере была решена по теореме, обратной теореме Виета, из которой следует, что по сумме и произведе-

[1] Фактически определения корня.

нию двух чисел можно однозначно восстановить сами эти числа.

3. Сопряжённые радикалы — выражения вида $\sqrt{a}-\sqrt{b}$ и $\sqrt{a}+\sqrt{b}$ — обладают замечательным свойством: их произведение уже не содержит корней[1] (сравните с сопряжёнными модулями в § 11):

$$\left(\sqrt{a}-\sqrt{b}\right)\left(\sqrt{a}+\sqrt{b}\right)=a-b. \tag{17}$$

При использовании равенства (17) надо учитывать, что его правая часть определена при любых действительных a и b, а левая — только при неотрицательных.

Пример. $\dfrac{4x+15-4x^2}{\sqrt{4x+15}+2x}\geqslant 0.$

Решение. $\ldots \iff \dfrac{\left(\sqrt{4x+15}-2x\right)\left(\sqrt{4x+15}+2x\right)}{\sqrt{4x+15}+2x}\geqslant 0 \iff$

$$\iff \begin{cases}\sqrt{4x+15}\geqslant 2x\\ \sqrt{4x+15}\neq -2x.\end{cases}$$

Рассмотрим два случая:

1) $\begin{cases}x<0\ (\Rightarrow -2x>0)\\ 0\leqslant 4x+15\neq 4x^2\end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases}-\frac{15}{4}\leqslant x<0\\ \left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)\neq 0\end{cases} \iff \begin{cases}-\frac{15}{4}\leqslant x<0\\ x\neq -\frac{3}{2};\end{cases}$

2) $\begin{cases}x\geqslant 0\ (\Rightarrow \sqrt{4x+15}>0\geqslant -2x)\\ 4x+15\geqslant 4x^2\end{cases} \iff$

$\iff \begin{cases}x\geqslant 0\ (\Rightarrow x+\frac{3}{2}>0)\\ \left(x+\frac{3}{2}\right)\left(x-\frac{5}{2}\right)\leqslant 0\end{cases} \iff 0\leqslant x\leqslant \frac{5}{2}.$

Ответ: $\left[-\frac{15}{4},-\frac{3}{2}\right)\cup\left(-\frac{3}{2},\frac{5}{2}\right]$.

Пример. При каждом a решить уравнение

$$\frac{\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}}{\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}}=\frac{a}{x}.$$

Умножим числитель и знаменатель дроби, стоящей в левой части уравнения, на выражение, сопряжённое к знаменателю, т. е. на сумму

[1] По крайней мере, из a и b.

корней. Это делать можно, поскольку если эта сумма равна нулю, то оба корня, а значит, и их разность также равны нулю, что невозможно, т. к. разность корней стоит в знаменателе.

Решение. $\ldots$ ($\Rightarrow \sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\neq 0,$ иначе $\sqrt{a+x}=\sqrt{a-x}=0,$ а значит, $\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}=0$, что невозможно) $\iff$

$$\iff \quad \frac{\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)^2}{\left(\sqrt{a+x}-\sqrt{a-x}\right)\left(\sqrt{a+x}+\sqrt{a-x}\right)}=\frac{a}{x} \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} \dfrac{a+x+2\sqrt{a^2-x^2}+a-x}{(a+x)-(a-x)}=\dfrac{a}{x} \\ a+x\geqslant 0 \\ a-x\geqslant 0 \end{cases} \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} \dfrac{\sqrt{a^2-x^2}+a}{x}=\dfrac{a}{x} \\ -a\leqslant x\leqslant a \end{cases} \quad \iff \quad \begin{cases} 0\neq x=\pm a \\ -a\leqslant x\leqslant a \end{cases} \quad \iff \quad \ldots$$

Ответ: $x=\pm a$ при $a>0$; $x\in\varnothing$ при $a\leqslant 0$.

В некоторых задачах даже обычные числа представляются в виде[1] сопряжённых радикалов, например:

$$\frac{1}{\sqrt{2}+1}=\frac{\sqrt{2}-1}{\left(\sqrt{2}+1\right)\left(\sqrt{2}-1\right)}=\frac{\sqrt{2}-1}{2-1}=\sqrt{2}-1.$$

4. Монотонность корня как функции позволяет решать некоторые задачи методом подбора (см. § 2).

Пример. $\sqrt{x+3}=9-x.$

Решение. $\ldots \iff f(x)=\sqrt{x+3}+x-9=0 \iff x=6,$ т. к. $f(6)=0$ и f строго возрастает.

Ответ: $x=6.$

При решении неравенств мало найти нуль строго монотонной функции — надо ещё учесть её область определения.

Пример. $\sqrt{x+4}\leqslant 2-x.$

Решение. $\ldots \iff f(x)=\sqrt{x+4}+x-2\leqslant 0 \iff -4\leqslant x\leqslant 0,$ т. к. $f(0)=0$ и f строго возрастает на $D(f)=[-4,+\infty).$

Ответ: $-4\leqslant x\leqslant 0.$

[1] Часто завуалированном.

Задачи

109. $\sqrt{x+1}\sqrt{2x+3} = x+3$.

$\surd$ **110.** $\sqrt{x-6}\sqrt{x-12} < x-1$.

111. $\sqrt{(x-1)^2(x-5)} = |x-1|\sqrt{x^2-25}$.

$\surd$ **112.** $\sqrt{(x-1)^2(x-5)} = |x-1|\sqrt{25-x^2}$.

$\surd$ **113*.** При каждом a решить неравенство

$$3(2x-a) + 5a\sqrt{2x-a} - 2a^2 > 0.$$

114*. $\sqrt[3]{\dfrac{x+3}{5x+2}} + \sqrt[3]{\dfrac{5x+2}{x+3}} = \dfrac{13}{6}$.

$\surd$ **115*.** $\begin{cases} \sqrt{\dfrac{2x-1}{y+2}} + \sqrt{\dfrac{y+2}{2x-1}} = 2 \\ x+y = 12 \end{cases}$

116. $\begin{cases} x^3 - \sqrt{y} = 1 \\ 5x^6 - 8x^3\sqrt{y} + y = 1. \end{cases}$

$\surd$ **117.** $\begin{cases} |-x| - \sqrt[3]{y+3} = 1 \\ (-x\sqrt{-x})^2 - y = 10. \end{cases}$

$\surd$ **118.** $5\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}} + 4\sqrt{\dfrac{\sqrt{x+4}-\sqrt{x+3}}{\sqrt{x+4}+\sqrt{x+3}}} \leqslant 9\sqrt{x+4}$.

119★. $\sqrt[4]{97-x} + \sqrt[4]{x} = 5$.

120★. $\sqrt{x^2-9x+24} - \sqrt{6x^2-59x+149} = |5-x|$.

121★. При каждом a решить уравнение

$$\left(\sqrt{|x|+1} - \sqrt{|x|}\right)\left(\sqrt{|a|+1} + \sqrt{|a|}\right) = 1.$$

122°. $\sqrt{4x+1} + \sqrt{3x-2} = 5$.

$\surd$ **123.** $\sqrt{3x-5} - \sqrt{4-x} = 1$.

$\surd$ **124°.** $\sqrt[5]{x-1} + \sqrt{x+2} = 3$.

125. $\sqrt{x+5} > 7-x$.

$\surd$ **126.** $5\sqrt{x-3} + 2\sqrt{x} + 3x \leqslant 21$.

127★. $\sqrt{(x+4)(2x+3)} - 3\sqrt{x+8} = 4 - \sqrt{(x+8)(2x+3)} + 3\sqrt{x+2}.$

128★. При каждом a решить уравнение

$$(x-3)(x+1) + 3(x-3)\sqrt{\frac{x+1}{x-3}} = (a-1)(a+2).$$

§ 17. Борьба со сложными радикалами

— выражениями вида $\sqrt{T + U\sqrt{V}}$.

1. Можно попытаться извлечь внешний корень, *разглядев* под ним полный квадрат выражения вида $A + B\sqrt{C}$. Причём, если в исходном выражении T, U, V были целыми числами, то и A, B, C обычно следует искать в виде целых чисел. Расписав равенство $T + U\sqrt{V} = \left(A + B\sqrt{C}\right)^2$ и приравняв отдельно рациональные и иррациональные части, получим, что число $U\sqrt{V}$ равно удвоенному произведению чисел A и $B\sqrt{C}$, а число T — сумме их квадратов. Например,

$$\sqrt{3 + 2\sqrt{2}} = 1 + \sqrt{2}.$$

2. Иногда[1] помогает формула *сложных радикалов*[2]*:*

$$\sqrt{a \pm b\sqrt{c}} = \sqrt{\frac{a+d}{2}} \pm \sqrt{\frac{a-d}{2}},$$

где $a, b, c \geqslant 0$, $d = \sqrt{a^2 - b^2 c}$.

Пример. Упростить, избавившись от сложных радикалов,

$$2\sqrt{3 + \sqrt{5 - \sqrt{13 + \sqrt{48}}}}.$$

Попытаемся извлечь корень из $13 + \sqrt{48}$. Будем искать его в виде $m + k\sqrt{n}$, где $m, k, n \in \mathbb{Z}$. Представляя $\sqrt{48} = 2 \cdot 2\sqrt{3} = 2\sqrt{12}$ различными способами в виде удвоенного произведения чисел вида m и $k\sqrt{n}$, получим, что $13 + \sqrt{48} = \left(\sqrt{12} + 1\right)^2$.

[1] Когда $a^2 - b^2 c$ — полный квадрат.

[2] При использовании этой формулы может измениться ОДЗ, поэтому лучше её применять только для чисел.

Решение. $\ldots = 2\sqrt{3+\sqrt{5-\left(\sqrt{12}+1\right)}} = 2\sqrt{3+\left(\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt{2}+\sqrt{6}$,
т. к. $\left(\sqrt{2}+\sqrt{6}\right)^2 = 8+2\sqrt{12} = \left(2\sqrt{2-\sqrt{3}}\right)^2$.

Ответ: $\sqrt{2}+\sqrt{6}$.

Последний шаг в разобранном примере, а именно равенство

$$2\sqrt{3+\left(\sqrt{3}-1\right)} = \sqrt{2}+\sqrt{6},$$

был сделан при помощи формулы сложных радикалов. В чистовом же решении этот переход был доказан посредством возведения обеих частей (положительных!) равенства в квадрат. Кстати, так и доказывается формула сложных радикалов. Приведём ещё один пример на эту тему.

Пример. Вычислить $\sqrt{\left|40\sqrt{2}-57\right|}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$.

Решение. 1. $40^2\cdot 2 = 3200 < 3249 = 57^2 \quad\Longrightarrow\quad 40\sqrt{2} < 57$.

2. Обозначим $x = \sqrt{57-40\sqrt{2}}-\sqrt{40\sqrt{2}+57}$. Тогда

$$x^2 = 2\cdot 57 - 2\cdot\sqrt{57^2-40^2\cdot 2} = 100 \quad\Longrightarrow\quad x=-10,$$

т. к. $x<0$.

Ответ: -10.

3. Если это не наталкивается на дополнительные технические трудности, то можно воспользоваться уже знакомым нам приёмом (см. п. 2 § 16) — обозначить внутренний корень новой буквой.

Пример. $\sqrt{x-2+\sqrt{2x-5}}+\sqrt{x+2+3\sqrt{2x-5}} = 7\sqrt{2}$.

Решение. $\ldots \iff \sqrt{\frac{y^2+1}{2}+y}+\sqrt{\frac{y^2+9}{2}+3y} = 7\sqrt{2}$,

где $y=\sqrt{2x-5}$ $\left(\Rightarrow x=\frac{y^2+5}{2}\right)$, $\iff$

$\iff \frac{y+1}{\sqrt{2}}+\frac{y+3}{\sqrt{2}} = 7\sqrt{2} \iff$

$\iff y=5 \iff x=\frac{5^2+5}{2}$.

Ответ: $x=15$.

4. Пожалуй, самым прозаичным способом избавления от сложных радикалов является последовательное возведение в квадрат[1].

[1] Для достижения желаемого результата каждый очередной радикал перед каждым очередным возведением в квадрат следует уединять.

Пример. $\sqrt{x+1+\sqrt{2x^2+x+3}}=4$.

Решение. ... $\iff \quad x+1+\sqrt{2x^2+x+3}=16 \quad \iff$

$$\iff \quad \sqrt{2x^2+x+3}=15-x \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} 15-x\geqslant 0 \\ 2x^2+x+3=225-30x+x^2 \end{cases} \quad \iff$$

$$\iff \quad \begin{cases} x\leqslant 15 \\ (x+37)(x-6)=0 \end{cases} \quad \iff \quad \ldots$$

Ответ: $\{-37,6\}$.

5. У Вас уже есть некоторый опыт использования абстрактных функций, изучения их свойств (задачи с модулями из § 13, использование монотонности при подборе корней), и Вы, наверное, уже убедились, что этот метод сильно модифицирует задачу, как бы „оживляет" её, позволяя делать порой неожиданные, но сильные выводы, к которым было бы очень трудно[1] прийти при помощи обычных средств. В некоторых, специально подобранных, задачах со сложными радикалами этот метод также используется, причём иногда представляет чуть ли не единственный способ решения.

Пример. $2+\sqrt{2+\sqrt{2+\sqrt{x}}}=x$.

Стандартный способ привёл бы нас к уравнению восьмой степени.

Решение. ... $\iff \quad f(f(f(x)))=x$, где $f(x)=2+\sqrt{x}$ — строго возрастает на $D(f)=[0,+\infty)$, $\quad \iff \quad f(x)=x$. Докажем это.

1. $f(x)=x\,(\geqslant 0) \quad \Longrightarrow \quad f(f(f(x)))=f(f(x))=f(x)=x$.
2. $f(x)>x\,(\geqslant 0) \quad \Longrightarrow \quad f(f(f(x)))>f(f(x))>f(x)>x$.
3. $(0\leqslant)\,f(x)<x \quad \Longrightarrow \quad f(f(f(x)))<f(f(x))<f(x)<x$.

Далее $f(x)=x \quad \iff \quad (\sqrt{x}+1)(\sqrt{x}-2)=0 \quad \iff \quad \ldots$

Ответ: $x=4$.

Задачи

129°. Вычислить $3\cdot\dfrac{\sqrt{8+2\sqrt{7}}}{\sqrt{8-2\sqrt{7}}}-\sqrt{2}\cdot\dfrac{\sqrt{3+2\sqrt{7}}}{\sqrt{3-2\sqrt{7}}}$.

[1] См. сноску на с. 37.

$\surd$ **130.** Упростить, избавившись от сложных радикалов,

$$\frac{2+\sqrt{3}}{\sqrt{2}+\sqrt{2+\sqrt{3}}}+\frac{2-\sqrt{3}}{\sqrt{2}-\sqrt{2-\sqrt{3}}}.$$

131$^\bigstar$. Найти все a, при которых уравнение

$$\sqrt{x+3-4\sqrt{x-1}}+\sqrt{x+8-6\sqrt{x-1}}=a$$

имеет хотя бы один корень, причём все его корни принадлежат отрезку $[2,17]$.

$\surd$ **132*.** $\dfrac{x+3}{3x}=\sqrt{\dfrac{1}{9}+\dfrac{1}{x}\sqrt{\dfrac{4}{9}+\dfrac{2}{x^2}}}.$

133$^\bigstar$. Для каждого a решить уравнение

$$\sqrt{a+\sqrt{a+x}}=x.$$

Математические обозначения

$a \in A$ — элемент a принадлежит множеству A;
$\{a, b, c\}$ — множество, состоящее из элементов a, b и c;
$\{a\}$ — множество, состоящее из одного элемента a;
$A = B$ — множества A и B равны (состоят из одних и тех же элементов);
$\{\, x \mid P(x) \,\}$ — множество всех x, для которых верно утверждение $P(x)$;
$A \cup B = \{\, x \mid x \in A$ или $x \in B \,\}$ — объединение множеств A и B;
$A \cap B = \{\, x \mid x \in A$ и $x \in B \,\}$ — пересечение множеств A и B;
$\varnothing$ — пустое множество (множество, не содержащее ни одного элемента);
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ — множества натуральных, целых, рациональных и действительных чисел соответственно.

Список литературы

1. *Сергеев И. Н.* Математика. Задачи с ответами и решениями: Пособие для поступающих в вузы. — М.: КДУ, 2005.

2. *Мельников И. И., Сергеев И. Н.* Как решать задачи по математике на вступительных экзаменах. — М.: Издательство Московского университета, 1990.

3. Варианты вступительных экзаменов по математике 2000—2006 гг. под общей редакцией И. Н. Сергеева (серия брошюр, опубликованных издательством ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ).

Оглавление

Уравнения и неравенства

Методическая разработка для учащихся заочного отделения Малого механико-математического факультета

Канунников Андрей Леонидович

Оригинал-макет подготовили С. Л. Кузнецов и А. Л. Канунников

Подписано в печать .
Формат $60 \times 90\frac{1}{16}$.
Объём 4 п. л. Заказ 25.
Тираж 100 экз.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ
119992, г. Москва, Ленинские горы, МГУ

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета