МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ УРАВНЕНИЯ И НЕРАВЕНСТВА

Методическая разработка
для учащихся заочного отделения

МОСКВА — 2008

УДК 51(023)
ББК 22.1
Т67

Т67 **Тригонометрические** уравнения и неравенства : методическая разработка для учащихся заочного отделения МММФ / автор-составитель Е. Ю. Иванова. — М. : изд-во Центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2008. — 24 с. : ил.

В разработке рассмотрены основные определения и понятия тригонометрии; приведены приёмы решения тригонометрических уравнений и неравенств.

ББК 22.1

Тригонометрические уравнения и неравенства.

Автор-составитель Е. Ю. Иванова.

Редактор А. В. Деревянкин. Техн. редактор М. Ю. Панов.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ.
Москва, Воробьёвы горы.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.

Предисловие

Разработка посвящена методам решения тригонометрических уравнений и неравенств. Кроме различных способов решения таких уравнений и неравенств в ней приведено также изложение основных определений и понятий тригонометрии. Все сформулированные определения равносильны встречающимся в школьном курсе, но в брошюре они нередко даны в несколько иной форме. Полезно для вас будет сравнить различные виды определений и проверить их равносильность.

Решение тригонометрических уравнений и неравенств часто оказывается связано с решением рациональных уравнений и неравенств, а также с тождественными преобразованиями и методом координат. На некоторые из этих связей мы указываем в тексте.

Надеемся, что разработка поможет вам систематизировать свои знания и научиться приёмам решения тригонометрических задач.

§ 1. Тригонометрический круг

Рассмотрим на плоскости прямоугольную систему координат, в которой построена окружность радиуса 1 с центром в начале координат. Такую окружность принято называть *тригонометрическим кругом* (или *тригонометрической окружностью*). Точку с координатами $(1; 0)$, лежащую на этой окружности, назовём «началом отсчёта». Направление движения против часовой стрелки будем называть положительным направлением (см. рис. 1).

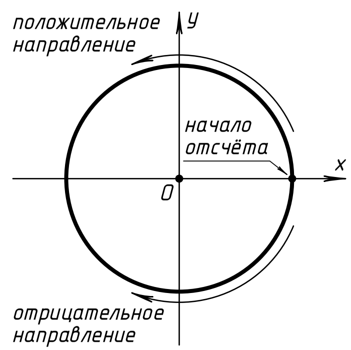

Рис. 1

Определив направление, мы по аналогии с числовой прямой можем наносить на нашу окружность числа. Пусть, например, мы хотим нанести на окружность число t. Представим себе, что наша тригонометрическая окружность — это кольцевая автомобильная трасса, и в точке O — начале отсчёта — стоит автомобиль. Сядем в него и поедем: если $t>0$ — в положительном направлении, если $t<0$ — в отрицательном. Будем ехать до тех пор, пока пройдённое расстояние не станет равно $|t|$. Точка на окружности, в которой мы окажемся, и будет соответствовать числу t.

По-другому точку на окружности, соответствующую числу t, можно представить себе как второй конец намотанной на окружность нерастяжимой нити длины $|t|$, первый конец которой закреплён в начале отсчёта. Если $t>0$, нить наматывается против часовой стрелки — в положительном направлении, если же $t<0$, то по часовой стрелке — в отрицательном направлении.

Таким образом, одна точка на окружности может являться изображением многих чисел.

1. Нанесите на тригонометрический круг числа: $\frac{3\pi}{4}$, $\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{4}$, $-\frac{\pi}{2}$, $-\frac{7\pi}{4}$, $-\frac{7\pi}{2}$. Сколько различных точек у вас получилось?

2. Пусть некоторому числу x соответствует на тригонометрическом круге точка A. Опишите множество всех чисел, которым также соответствует точка A.

Напомним теперь общие определения тригонометрии.

Косинусом числа t ($\cos t$) называется абсцисса (координата x) точки на тригонометрическом круге, соответствующей числу t.

Синусом числа t ($\sin t$) называется ордината (координата y) точки на тригонометрическом круге, соответствующей числу t.

Тангенсом числа t ($\operatorname{tg} t$) называется отношение $\frac{\sin t}{\cos t}$.

Котангенсом числа t ($\operatorname{ctg} t$) называется отношение $\frac{\cos t}{\sin t}$.

Секансом числа t ($\sec t$) называется отношение $\frac{1}{\cos t}$.

Косекансом числа t ($\operatorname{cosec} t$) называется отношение $\frac{1}{\sin t}$.

Заметим, что из сформулированного таким образом определения тригонометрических функций сразу следует (например, по теореме Пифагора) *основное тригонометрическое тождество*:

$$\sin^2 t+\cos^2 t=1,$$

где t — любое число.

§ 2. Простейшие тригонометрические уравнения

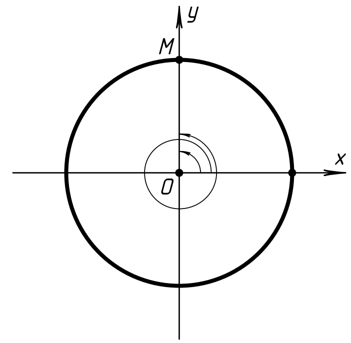

Рис. 2

С помощью тригонометрического круга легко решать несложные тригонометрические уравнения. Рассмотрим, например, уравнение $\sin x=1$. Так как синус — это ордината точки x на тригонометрической окружности, то следует выяснить, какие точки окружности имеют такую ординату. Легко видеть, что на окружности есть только одна точка с ординатой 1, а именно, точка $M(0;\,1)$ (см. рис. 2). Одно из чисел, соответствующих точке M, — это число $\frac{\pi}{2}$; этой точке соответствуют также все числа вида $\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где n — целое ($n\in\mathbb{Z}$), и только они. Таким образом, ответ в данном уравнении будет $x=\frac{\pi}{2}+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$.

3. Каков ответ в уравнении $\cos x=0$?

4. Решите уравнение $\sin x=1/2$.

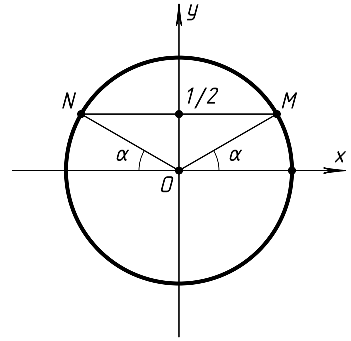

Рис. 3

Р е ш е н и е. Аналогично предыдущим рассуждениям найдём точки на тригонометрическом круге, ординаты которых имеют значение $1/2$. Таких точек две: M и N (см. рис. 3; $\alpha=30^\circ$). Выясним теперь, какие числа соответствуют этим точкам. Точке M, в частности, соответствует число $\pi/6$, а точке N — число $\pi-\frac{\pi}{6}=\frac{5\pi}{6}$. Таким образом, все числа, соответствующие точке M, имеют вид $\frac{\pi}{6}+2\pi n$, а все числа, соответствующие точке N, имеют вид $\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, где $n,\,k\in\mathbb{Z}$.

О т в е т: $x=\frac{\pi}{6}+2\pi n$, $x=\frac{5\pi}{6}+2\pi k$, $n,\,k\in\mathbb{Z}$.

В данном случае мы воспользовались тем фактом, что $\sin(\pi/6)=1/2$. Однако не всегда искомое число можно выразить с помощью рациональных функций и числа π. В таких случаях используют обратные тригонометрические функции: арксинус, арккосинус и т. п. Напомним их определения.

Арксинусом числа a ($\arcsin a$) называется такое число x, что

$$\sin x = a \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{2}.$$

Арккосинусом числа a ($\arccos a$) называется такое число x, что

$$\cos x = a \quad \text{и} \quad 0 \leqslant x \leqslant \pi.$$

Арктангенсом числа a ($\operatorname{arctg} a$) называется такое число x, что

$$\operatorname{tg} x = a \quad \text{и} \quad -\frac{\pi}{2} < x < \frac{\pi}{2}.$$

Арккотангенсом числа a ($\operatorname{arcctg} a$) называется такое число x, что

$$\operatorname{ctg} x = a \quad \text{и} \quad 0 < x < \pi.$$

Приведём теперь решения всех простейших тригонометрических уравнений, к которым в итоге сводятся многие тригонометрические уравнения.

а) $\sin x = a$. Решения существуют только при $|a| \leqslant 1$ и имеют вид

$$x = (-1)^n \arcsin a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

б) $\cos x = a$. Решения существуют только при $|a| \leqslant 1$ и имеют вид

$$x = \pm\arccos a + 2\pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

в) $\operatorname{tg} x = a$. Решения существуют при любом действительном a и имеют вид

$$x = \operatorname{arctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

г) $\operatorname{ctg} x = a$. Решения существуют при любом действительном a и имеют вид

$$x = \operatorname{arcctg} a + \pi n, \quad n \in \mathbb{Z}.$$

Каким образом можно свести тригонометрическое уравнение к одному из простейших? Чаще всего находят применение различные тригонометрические формулы преобразования. Если в уравнении встречаются только выражения от одной тригонометрической функции, то удобно сделать замену переменных и свести тригонометрическое уравнение к рациональному. Если в уравнении присутствуют квадраты синусов или косинусов, то основное тригонометрическое тождество поможет снизить число участвующих в выражении функций. Основные приёмы решения тригонометрических уравнений мы рассмотрим в следующем параграфе.

Упражнения

5. Решите уравнения:

а) $\sin 2x = \frac{1}{2}$;

б) $\sin\left(3x - \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{2}$;

в) $\sin\left(\frac{x}{2} + \frac{\pi}{8}\right) = \frac{\sqrt{2}}{2}$;

г) $\cos\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{2}$;

д) $\cos\left(\frac{x}{3} + \frac{\pi}{12}\right) = \frac{\sqrt{3}}{2}$;

е) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} = -1$;

ж) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{\sqrt{2}}{2}$;

з) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{\sqrt{3}}{3}$.

6. Решите уравнения:

а) $\sin x = \frac{1-\sqrt{5}}{2}$;

б) $\sin 2x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$;

в) $\cos\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) = -\frac{1}{3}$;

г) $6 \sin^2 x + \sin x - 2 = 0$;

д) $3 \sin^2 x - 10 \sin x + 3 = 0$;

е) $2 \sin^2 x = 4 \sin x + \cos^2 x$;

ж) $3 \sin^2 2x + \cos^2 2x + 5 \cos 2x = 0$;

з) $\cos^2 x - 3 \cos x + 1 = 0$.

Р е ш е н и е 6б. $\frac{1+\sqrt{5}}{2} > \frac{1+1}{2} = 1$. Следовательно, ни при каких x значение функции $\sin 2x$ не может быть равно заданному числу. Поэтому уравнение не имеет решений.

О т в е т: $x \in \varnothing$.

7. Решите уравнения:

а) $\arcsin x = \frac{\pi}{6}$; б) $\arcsin x = \frac{5\pi}{6}$; в) $\arccos x = \frac{5\pi}{6}$.

8. Решите уравнения:

а) $\sin x = 1 + \cos x$;

б) $2 \sin \frac{x}{2} - 3 \cos \frac{x}{2} = 3$;

в) $6 \cos 2x - 5 \sin 2x = 8$;

г) $\sqrt{3} \sin x + \cos x = 1$;

д) $\cos x\ (1 - 3 \cos x) + 3 \sin x\ (1 - \sin x) = 0$.

Р е ш е н и е 8а. Воспользуемся формулами двойного угла: $\cos x = 2 \cos^2 \frac{x}{2} - 1$, $\sin x = 2 \sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2}$. Таким образом, исходное уравнение можно переписать в виде:

$$\sin \frac{x}{2} \cos \frac{x}{2} = \cos^2 \frac{x}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \cos \frac{x}{2} = 0 \text{ или } \sin \frac{x}{2} = \cos \frac{x}{2}.$$

Решения первого уравнения суть $\frac{x}{2} = \frac{\pi}{2} + \pi n$ или $x = \pi + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, а второе равносильно уравнению $\operatorname{tg} \frac{x}{2} = 1 \Leftrightarrow \frac{x}{2} = \frac{\pi}{4} + \pi k$ или $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$. Объединяя полученные серии решений, получаем окончательный ответ.

О т в е т: $x = \pi + 2\pi n$, $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

§ 3. Примеры решений тригонометрических уравнений

Общих методов решений тригонометрических уравнений нет, однако можно привести ряд полезных соображений. Часто с помощью тригонометрических преобразований уравнения приводят к такому виду, когда в правой части стоит нуль, а левую можно разложить на множители. Полезно также сводить тригонометрические уравнения к алгебраическим, при этом часто приводит к успеху замена элементарных функций в уравнении на их выражения через тангенс половинного угла. Такая замена называется *универсальной тригонометрической подстановкой*. Нередко оказывается полезным понижение степени уравнения.

Напомним также некоторые тригонометрические формулы, которые могут оказаться полезными при решении уравнений.

Функции суммы и разности двух углов:

$$\sin(\alpha\pm\beta)=\sin\alpha\cos\beta\pm\cos\alpha\sin\beta,$$

$$\cos(\alpha\pm\beta)=\cos\alpha\cos\beta\mp\sin\alpha\sin\beta,$$

$$\operatorname{tg}(\alpha\pm\beta)=\frac{\operatorname{tg}\alpha\pm\operatorname{tg}\beta}{1\mp\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta}.$$

Тригонометрические формулы двойного и тройного углов:

$$\sin 2\alpha=2\sin\alpha\cos\alpha,$$

$$\cos 2\alpha=\cos^2\alpha-\sin^2\alpha=2\cos^2\alpha-1=1-2\sin^2\alpha,$$

$$\operatorname{tg}2\alpha=\frac{2}{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha},\quad \operatorname{ctg}2\alpha=\frac{\operatorname{ctg}\alpha-\operatorname{tg}\alpha}{2},$$

$$\sin 3\alpha=3\sin\alpha-4\sin^3\alpha,\quad \cos 3\alpha=4\cos^3\alpha-3\cos\alpha.$$

Формулы суммы и разности одноимённых тригонометрических функций:

$$\sin\alpha+\sin\beta=2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2},$$

$$\sin\alpha-\sin\beta=2\sin\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha+\cos\beta=2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

$$\cos\alpha-\cos\beta=-2\sin\frac{\alpha+\beta}{2}\sin\frac{\alpha-\beta}{2}.$$

Формулы преобразования произведения тригонометрических функций в сумму:

$$\sin\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\sin(\alpha+\beta)+\sin(\alpha-\beta)),$$

$$\cos\alpha\cos\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)),$$

$$\sin\alpha\sin\beta=\frac{1}{2}(\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)).$$

Выражение тригонометрических функций через тангенс половинного угла (универсальная тригонометрическая подстановка):

$$\sin\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \cos\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{1+\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \operatorname{tg}\alpha=\frac{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}},\quad \operatorname{ctg}\alpha=\frac{1-\operatorname{tg}^2\frac{\alpha}{2}}{2\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2}}.$$

З а м е ч а н и е. Первые три формулы не являются тождествами, так как их правые части не определены при $\alpha=\pi+2\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$, а левые — определены. Поэтому такие значения α следует рассматривать отдельно (см. ниже решение задачи **13**). Четвёртая формула является тождеством.

Формула вспомогательного угла:

$$a\sin\alpha+b\cos\alpha=\sqrt{a^2+b^2}\sin(\alpha+\varphi),$$

где угол φ определяется из условий $\sin\varphi=\frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}}$, $\cos\varphi=\frac{a}{\sqrt{a^2+b^2}}$. Угол φ называют вспомогательным углом.

Разберём несколько задач.

9. Решите уравнение $\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=-2$.

Р е ш е н и е. По формуле тангенса суммы двух углов $\operatorname{tg}\left(x+\frac{\pi}{4}\right)=\frac{\operatorname{tg}x+\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}{1-\operatorname{tg}x\operatorname{tg}\frac{\pi}{4}}$, откуда $\operatorname{tg}x+\frac{\operatorname{tg}x+1}{1-\operatorname{tg}x}=-2$. Положим $\operatorname{tg}x=y$, тогда получим алгебраическое уравнение $y+\frac{y+1}{1-y}=-2$, решив которое, найдём $y=\pm\sqrt{3}$. Следовательно,

$$x=\operatorname{arctg}(\pm\sqrt{3})+\pi n=\pm\operatorname{arctg}\sqrt{3}+\pi n=\pm\frac{\pi}{3}+\pi n,\quad \text{где } n\in\mathbb{Z}.$$

О т в е т: $\pm\frac{\pi}{3}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

10. Решите уравнение $\cos 4x \cos 2x = \cos 5x \cos x$.

Решение. Представим произведения косинусов в виде сумм, тогда $\frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 2x) = \frac{1}{2}(\cos 6x + \cos 4x)$. Отсюда $\cos 2x = \cos 4x$ или $\cos 2x - \cos 4x = 0$. Решим полученное уравнение, используя формулу разности косинусов:

$$-2 \sin 3x \sin(-x) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \sin 3x \sin x = 0.$$

Следовательно, $\sin 3x = 0$ (т. е. $3x = \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$) или $\sin x = 0$ (т. е. $x = \pi k$, $k \in \mathbb{Z}$). Очевидно, что второе условие является частью первого.

Ответ: $\frac{\pi n}{3}$, $n \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Отметим, что иногда при решении уравнения $\cos 2x = \cos 4x$ применяют следующие ошибочные рассуждения: «Поскольку косинусы равны, то, следовательно, $2x$ и $4x$ отличаются на период $2\pi n$, т. е. $4x = 2x + 2\pi n$, $2x = 2\pi n$, $x = \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$». Как видим, при таком решении часть решений исходного уравнения оказывается потеряна. Это объясняется тем, что если равны косинусы двух чисел, то это ещё не значит, что сами числа отличаются на полное число оборотов вокруг начала координат тригонометрического круга. Например, у чисел α и β, изображённых на рис. 4, косинусы также равны. Таким образом, если косинусы чисел α и β равны, то либо $\alpha = \beta + 2\pi n$, либо $\alpha = -\beta + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

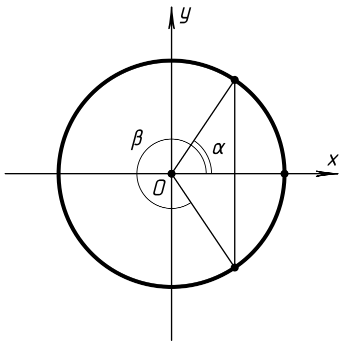

Рис. 4

11. Решите уравнение

$$\sin 8x - \cos 6x = \sqrt{3}(\sin 6x + \cos 8x).$$

Решение. Перепишем уравнение несколько иначе: $\sin 8x - \sqrt{3} \cos 8x = \sqrt{3} \sin 6x + \cos 6x$. Теперь, выполняя преобразования

$$\sin 8x - \sqrt{3} \cos 8x = 2\left(\frac{1}{2} \sin 8x - \frac{\sqrt{3}}{2} \cos 8x\right) =$$

$$= 2\left(\cos\left(-\frac{\pi}{3}\right) \sin 8x + \sin\left(-\frac{\pi}{3}\right) \cos 8x\right) = 2 \sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right)$$

(аналогично для правой части) или пользуясь сразу формулой вспомогательного угла, получаем, что исходное уравнение равносильно следующему: $\sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) = \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right)$ или $\sin\left(8x - \frac{\pi}{3}\right) - \sin\left(6x + \frac{\pi}{6}\right) = 0$.

Применяем формулу разности синусов: $2 \cos\left(7x - \frac{\pi}{12}\right) \sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$.

Тогда либо $\cos\left(7x - \frac{\pi}{12}\right) = 0$, $7x - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{2} + \pi n$, $7x = \frac{7\pi}{12} + \pi n$ и $x = \frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{7}$, либо $\sin\left(x - \frac{\pi}{4}\right) = 0$, $x - \frac{\pi}{4} = \pi k$ и $x = \frac{\pi}{4} + \pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\frac{\pi}{12} + \frac{\pi n}{7}$, $\frac{\pi}{4} + \pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

12. Решите уравнение $1 + \cos x + \sin x = 0$.

Решение. Вновь применяя формулу вспомогательного угла, получаем $\cos x + \sin x = \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right)$. Таким образом, исходное уравнение равносильно следующему: $1 + \sqrt{2} \sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = 0$, откуда $\sin\left(x + \frac{\pi}{4}\right) = -\frac{1}{\sqrt{2}}$. На тригонометрическом круге такое значение синуса имеют, в частности, две точки: $-\frac{\pi}{4}$ и $-\frac{3\pi}{4}$ (см. рис. 5).

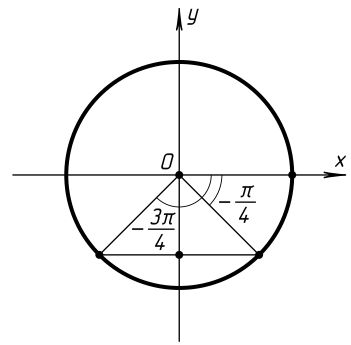

Рис. 5

Следовательно, $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{\pi}{4} + 2\pi n$ или $x + \frac{\pi}{4} = -\frac{3\pi}{4} + 2\pi k$, где $n, k \in \mathbb{Z}$. Преобразовывая, получаем окончательный ответ.

Ответ: $-\frac{\pi}{2} + 2\pi n$, $-\pi + 2\pi k$, $n, k \in \mathbb{Z}$.

Замечание. Уравнения вида $a \sin \alpha + b \cos \alpha = c$ можно решать не только с помощью вспомогательного угла, но и сводя их к однородному уравнению. Рассмотрим, например, уравнение

$$a \sin^2 x + b \sin x \cos x + c \cos^2 x = 0.$$

Такое уравнение называется однородным уравнением второй степени относительно $\sin \alpha$ и $\cos \alpha$. (Однородным относительно функций F и G называется уравнение, у которого суммы степеней F и G при всех участвующих в записи слагаемых одинаковы.) Уравнения такого типа легко решать, сводя их заменой $y = \operatorname{tg} \alpha$ к квадратным уравнениям: поделим обе части уравнения на $\cos^2 x$ (если коэффициент при $\sin^2 x$ отличен от нуля, то $\cos x = 0$ не является решением данного уравнения, и, следовательно, разделив на $\cos^2 x$, мы совершим тождественный переход; если же $\cos x = 0$ является корнем уравнения, то можно разделить на $\sin^2 x$ или же вынести $\cos x$ за скобки и применить другие способы решения). Тогда после упрощения получим уравнение $a\ \mathrm{tg}^2\, x+b\ \mathrm{tg}\, x+c=0$. Обозначив $\mathrm{tg}\, x$ через y, сведём его к квадратному уравнению, из которого найдём $y=\mathrm{tg}\, x$, и, следовательно, x.

Заметим ещё, что если тригонометрическое уравнение содержит в обеих частях сумму свободных членов и выражений вида $\sin^2 x$, $\sin x \cos x$, $\cos^2 x$, $\cos 2x$, $\sin 2x$, то такое уравнение также сводится к однородному. Чтобы это осуществить, надо воспользоваться формулами двойного угла для $\sin 2x$ и $\cos 2x$, а также домножить все свободные члены на $\sin^2 x+\cos^2 x$ (значение выражения от этого не изменится, так как $\sin^2 x+\cos^2 x=1$).

При практическом применении этого метода стоит помнить, что в роли x, в зависимости от ситуации, может выступать любое выражение.

13. Решите уравнение $2 \sin 4x+16 \sin^3 x \cos x+3 \cos 2x-5=0$.

Р е ш е н и е. Заметим, что $2 \sin 4x=4 \sin 2x \cos 2x=8 \sin x \cos x\times$ $\times\cos 2x=8 \sin \cos x(1-2 \sin^2 x)=8 \sin x \cos x-16 \sin^3 x \cos x$. Тогда исходное уравнение будет иметь вид: $8 \sin x \cos x+3 \cos 2x-5=0$.

Далее можно привести полученное уравнение к однородному и сделать замену. Но мы на данном примере покажем другой способ решения таких уравнений, подходящий не только для однородных уравнений.

Сделаем универсальную тригонометрическую подстановку (выразим все участвующие тригонометрические функции через тангенс половинного угла). Для этого преобразуем полученное уравнение к виду $4 \sin 2x+3 \cos 2x=5$ и воспользуемся формулами

$$\sin 2x=\frac{2\ \mathrm{tg}\, x}{1+\mathrm{tg}^2\, x}, \quad \cos 2x=\frac{1-\mathrm{tg}^2\, x}{1+\mathrm{tg}^2\, x}.$$

Заменяя $\mathrm{tg}\, x$ на y, получаем алгебраическое уравнение

$$\frac{8y}{1+y^2}+\frac{3-3y^2}{1+y^2}=5 \iff 8y+3-3y^2=5+5y^2 \iff 4y^2-4y+1=0 \iff$$
$$\iff (2y-1)^2=0 \iff 2y-1=0 \iff y=1/2.$$

Следовательно, $\mathrm{tg}\, x=1/2$ и $x=\mathrm{arctg}(1/2)+\pi n$, где $n\in\mathbb{Z}$. Остаётся проверить, что в ходе решения не произошло потери корней. Это могли быть только те x, для которых $\mathrm{tg}\, x$ не имеет смысла, т. е. значения $x=\dfrac{\pi}{2}+\pi n$. Подставляя эти значения в левую часть уравнения $4 \sin 2x+3 \cos 2x=5$, получим: $4 \sin(\pi+2\pi n)+3 \cos(\pi+2\pi n)=-3$.

Значит, других корней, кроме $\mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{2}+\pi n$, нет.

О т в е т: $\mathrm{arctg}\, \dfrac{1}{2}+\pi n$, $n\in\mathbb{Z}$.

14. Найдите все решения системы

$$\begin{cases} |\sin x| \sin y=-1/4, \\ \cos(x+y)+\cos(x-y)=3/2, \end{cases}$$

удовлетворяющие условиям $0<x<2\pi$, $\pi<y<2\pi$.

Р е ш е н и е. Рассмотрим случай, когда $\sin x\geqslant 0$. Тогда $0<x\leqslant\pi$ и выполнены равенства $|\sin x| \sin y=\sin x \sin y=\dfrac{1}{2}(\cos(x-y)-\cos(x+y))$. Наша система примет вид

$$\begin{cases} \cos(x-y)-\cos(x+y)=-1/2, \\ \cos(x-y)+\cos(x+y)=3/2, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} \cos(x-y)=1/2, \\ \cos(x+y)=1. \end{cases}$$

Из неравенств $0<x\leqslant\pi$ и $\pi<y<2\pi$, вычитая и складывая, получим: $-2\pi<x-y<0$ и $\pi<x+y<3\pi$.

В промежутке от -2π до 0 существуют два числа, косинус которых равен $\dfrac{1}{2}$: это $-\dfrac{\pi}{3}$ и $-\dfrac{5\pi}{3}$. В промежутке от π до 3π существует только одно число, косинус которого равен 1: это 2π. Таким образом, мы получаем системы линейных уравнений:

$$\begin{cases} x-y=-\pi/3, \\ x+y=2\pi, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x=5\pi/6, \\ y=7\pi/6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=-5\pi/3, \\ x+y=2\pi, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x=\pi/6, \\ y=11\pi/6. \end{cases}$$

Аналогично, в случае $\sin x<0$ мы получаем систему

$$\begin{cases} \cos(x-y)-\cos(x+y)=1/2 \\ \cos(x-y)+\cos(x+y)=3/2 \end{cases}, \quad \pi<x<2\pi,$$

откуда

$$\begin{cases} \cos(x-y)=1 \\ \cos(x+y)=1/2 \end{cases} \quad \text{и} \quad -\pi<x-y<\pi, \quad 2\pi<x+y<4\pi.$$

Следовательно,

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=7\pi/3, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x=7\pi/6, \\ y=7\pi/6; \end{cases}$$

$$\begin{cases} x-y=0, \\ x+y=11\pi/3, \end{cases} \quad \text{откуда} \quad \begin{cases} x=11\pi/6, \\ y=11\pi/6. \end{cases}$$

О т в е т: $x_1=\dfrac{5\pi}{6}$, $y_1=\dfrac{7\pi}{6}$, $x_2=\dfrac{\pi}{6}$, $y_2=\dfrac{11\pi}{6}$, $x_3=\dfrac{7\pi}{6}$, $y_3=\dfrac{7\pi}{6}$, $x_4=\dfrac{11\pi}{6}$, $y_4=\dfrac{11\pi}{6}$.

15. Решите уравнение $\arccos(x\sqrt{3})+\arccos x=\dfrac{\pi}{2}$.

Р е ш е н и е. Перепишем это уравнение в виде $\arccos(x\sqrt{3})=\dfrac{\pi}{2}-$ $-\arccos x$ и возьмём косинусы от обеих частей:

$$\cos(\arccos(x\sqrt{3}))=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\arccos x\right) \;\Leftrightarrow\; x\sqrt{3}=\sin(\arccos x),$$

так как $\cos\left(\dfrac{\pi}{2}-\alpha\right)=\sin\alpha$. Далее:

$$x\sqrt{3}=\sqrt{1-x^2} \;\Rightarrow\; 3x^2=1-x^2 \;\Leftrightarrow\; x=\pm 1/2.$$

Сделаем проверку.

Для $x=1/2$:

$$\arccos(x\sqrt{3})+\arccos x=\arccos\left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\frac{1}{2}=\frac{\pi}{6}+\frac{\pi}{3}=\frac{\pi}{2},$$

т. е. $x=1/2$ — корень данного уравнения.

Для $x=-1/2$:

$$\arccos(x\sqrt{3})+\arccos x=\arccos\left(-\frac{\sqrt{3}}{2}\right)+\arccos\left(-\frac{1}{2}\right)=\frac{5\pi}{6}+\frac{2\pi}{3}=\frac{3\pi}{2},$$

т. е. $x=-1/2$ — посторонний корень.

О т в е т: $\dfrac{1}{2}$.

З а м е ч а н и е: Отметим, что из уравнения $\alpha=\beta$ следует уравнение $f(\alpha)=f(\beta)$, где f — любая тригонометрическая функция, содержащая в области определения α и β, но из уравнения $f(\alpha)=f(\beta)$ вовсе не обязательно следует уравнение $\alpha=\beta$. Поэтому при взятии тригонометрической функции от обеих частей уравнения является необходимой последующая проверка найденных корней.

Упражнения

Решите уравнения (**16—32**):

16. $\sqrt{1+\cos 2x}-\sqrt{1-\cos 2x}=1$.

17. $\cos^2 x+\cos^2 2x+\cos^2 3x=1$.

18. $(\cos 5x+\cos 7x)^2=(\sin 5x+\sin 7x)^2$.

19. $1+\sin 3x+\cos^3 x=\dfrac{3}{2}\sin 2x$.

20. $\sin 11x\sin x-\sin 7x\sin 8x=\dfrac{1}{2}\cos 13x+\dfrac{1}{4}\sqrt{1+2\cos x}$.

21. $3\sin x+5\cos x=0$.

22. $7\sin^2 x-5\sin x\cos x-\cos^2 x=0$.

23. $2\sin^3 x+5\sin^2 x\cos x-3\sin x\cos^2 x+\cos^3 x=0$.

24. $1+\cos 2x+3\sin 2x+6\cos^2 x=0$.

25. $\sin^2 x+\dfrac{1}{4}\sin^2 3x=\sin x\sin 3x$.

26. $\sin x-\sin 2x+\sin 5x+\sin 8x=0$.

27. $\sin^2 x+\sin 2x\sin 4x+\ldots+\sin nx\sin n^2x=1$.

28. $\dfrac{25}{12}+\operatorname{tg} x\operatorname{tg}\dfrac{x}{2}+\operatorname{ctg} x\operatorname{ctg}\dfrac{x}{2}=0$.

29. $\dfrac{3-4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}{3+4\cos 2\alpha+\cos 4\alpha}+\operatorname{ctg}^4\alpha-2=0$.

30. $(\operatorname{tg} x-\operatorname{tg}^2 x)^2-\cos(x+4\operatorname{tg} x)=-1$.

31. $\cos^4 x+4\cos x-1=0$.

32. $\sin^6 x+\cos^6 x=\dfrac{7}{16}$.

33. Докажите, что числа $\pm\operatorname{tg} 36^\circ$, $\pm\operatorname{tg} 72^\circ$ являются корнями уравнения $z^4-10z^2+5=0$.

34. Определите, при каких значениях параметра a уравнение

$$a\sin x+(a+1)\sin^2\frac{x}{2}+(a-1)\cos^2\frac{x}{2}=1$$

имеет решение.

У к а з а н и е. Исходное уравнение можно свести к однородному относительно синуса и косинуса от $x/2$.

Решите системы уравнений (**35—37**):

35. $\begin{cases} 8\cos^4 x-8\cos^2 x=\cos y-1, \\ 8\cos^4 y-8\cos^2 y=\cos x-1. \end{cases}$

36. $\begin{cases} \cos x+\cos y=1, \\ \cos\dfrac{x}{2}+\cos\dfrac{y}{2}=\dfrac{\sqrt{2}}{2}-1. \end{cases}$ **37.** $\begin{cases} \operatorname{tg} x\operatorname{tg} z=3, \\ \operatorname{tg} y\operatorname{tg} z=6, \\ x+y+z=\pi. \end{cases}$

38. Решите уравнение $\arcsin\dfrac{1}{\sqrt{x}}-\arcsin\sqrt{1-x}=\dfrac{\pi}{2}$.

§ 4. Простейшие тригонометрические неравенства

В этом параграфе мы займёмся очень простыми тригонометрическими неравенствами. Не научившись в совершенстве решать такие неравенства, вы не сможете решать и более сложные.

39. Решите неравенство $\sin x > \frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Найдём на тригонометрической окружности точки, соответствующие искомым числам — решениям неравенства $\sin x > \frac{1}{2}$. Это точки, ординаты которых больше $\frac{1}{2}$. Отметим такие точки на окружности. Они заполняют собой дугу MN, где точки M и N таковы, что их ординаты равны $\frac{1}{2}$ (см. рис. 6).

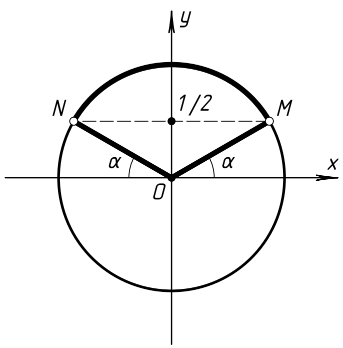

Рис. 6

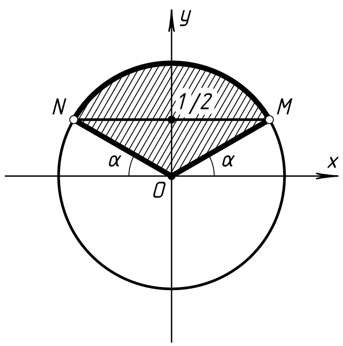

Рис. 7

Иногда это же множество точек окружности изображают так, как на рис. 7. (Во многих случаях этот способ удобнее, так как позволяет наглядно перейти от точек на окружности к углам, которые они изображают.)

Теперь нам надо записать множество точек на числовой оси, соответствующих точкам на дуге MN.

Точке M соответствуют точки $\frac{\pi}{6}+2\pi n$ $\left(\text{в частности, точка } \frac{\pi}{6}\right)$, а точке N — точки $\frac{5\pi}{6}+2\pi n$ $\left(\text{в частности, точка } \frac{5\pi}{6}\right)$, где $n \in \mathbb{Z}$. Теперь можно описать искомое множество.

О т в е т: $\left(\frac{\pi}{6}+2\pi n; \frac{5\pi}{6}+2\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

40. Решите неравенство $\sin x \leqslant \frac{1}{3}$.

Р е ш е н и е. На тригонометрической окружности множество решений этого неравенства изображается дугой MN (см. рис. 8). Аналогично решению задачи **39**,

нам нужно выбрать на числовой оси какой-нибудь отрезок, соответствующий этой дуге, и добавить к границам этого отрезка $2\pi n$.

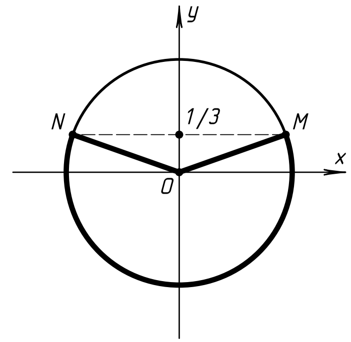

Рис. 8

Выберем какое-нибудь число, соответствующее одному из концов дуги. Например, точке M. Этой точке, в частности, соответствует число $\arcsin\frac{1}{3}$. Теперь, чтобы определить, какое число соответствует точке N, надо сдвинуться в отрицательном направлении на длину дуги MN. (В н и м а н и е! Если двигаться от точки M к N в положительном направлении, то мы опишем совсем другую дугу, решение другого неравенства, а именно, неравенства $\sin x \geqslant \frac{1}{3}$.) Получим, что точке N соответствует число $-\pi-\arcsin\frac{1}{3}$. Таким образом, один из отрезков, соответствующих дуге MN, будет $\left[-\pi-\arcsin\frac{1}{3}; \arcsin\frac{1}{3}\right]$ и ответом к неравенству $\sin x \leqslant \frac{1}{3}$ будет объединение отрезков $\left[-\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n; \arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right]$, где $n \in \mathbb{Z}$. (Заметим, что, двигаясь в положительном направлении, мы получили бы число $\pi-\arcsin\frac{1}{3}$ и промежуток $\left[\arcsin\frac{1}{3}; \pi-\arcsin\frac{1}{3}\right]$ не являлся бы решением заданного неравенства.)

О т в е т: $\left[-\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n; \arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Отметим, что выписанный ответ можно записать по-другому, например, так: $\left[\pi-\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n; 2\pi+\arcsin\frac{1}{3}+2\pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$. Подумайте, почему это возможно. Сколько различных ответов можно написать в данном неравенстве?

При оформлении решений не надо каждый раз воспроизводить в тетради все длинные рассуждения, аналогичные приведённым выше. Достаточно изобразить на тригонометрической окружности точки, соответствующие решениям неравенства, обозначить числа, соответствующие концам дуг, и записать ответ.

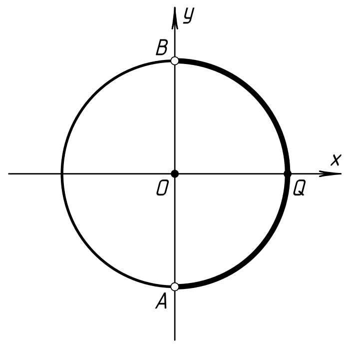

Рис. 9

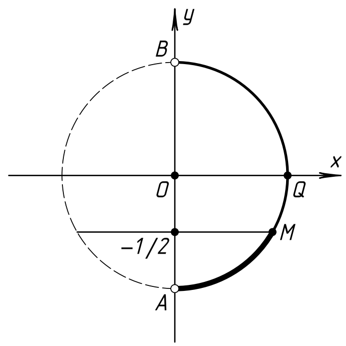

Рис. 10

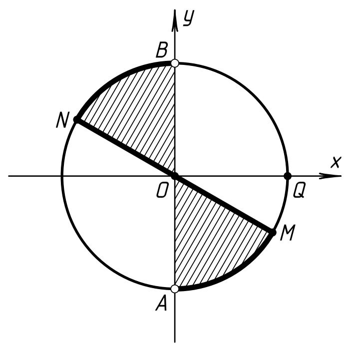

Рис. 11

Приведём теперь пример решения неравенства с тангенсом.

41. Решите неравенство $\operatorname{tg} x \leqslant -\frac{1}{2}$.

Р е ш е н и е. Поскольку период тангенса равен π, то очевидно, что множество точек на тригонометрической окружности будет симметрично относительно начала координат. Поэтому достаточно найти точки, удовлетворяющие неравенству, только на одной из половинок окружности.

Рассмотрим правую половинку окружности. В частности, она изображает промежуток $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$, причём в крайних точках тангенс не определён, при приближении от точки Q к A тангенс соответствующего числа стремится к $-\infty$, а при приближении от Q к B — к $+\infty$ (см. рис. 9). Самой точке Q соответствует 0 и, следовательно, тангенс в ней равен 0.

(Таким образом, мы получили, в частности, наглядную интерпретацию того факта, что любое уравнение вида $\operatorname{tg} x = a$ имеет решение.)

Решим исходное неравенство на промежутке $\left(-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right)$. Пусть точка M этого промежутка такова, что тангенс соответствующего ей числа (а именно, $\operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)$) равен $-\frac{1}{2}$ (см. рис. 10). Тогда искомое множество точек представляет собой дугу AM. Следовательно, решениями также должны являться точки, находящиеся на дуге, симметричной AM относительно начала координат (см. рис. 11).

Дуге AM соответствует интервал $\left(-\frac{\pi}{2}; \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$, а дуге BN, например, интервал $\left(\frac{\pi}{2}; \pi + \operatorname{arctg}\left(-\frac{1}{2}\right)\right]$.

Поскольку период тангенса равен π, то находить координаты точек второй дуги не нужно . Зная один из интервалов, соответствующий дуге AM, можно выписать ответ, добавив к обоим концам этого интервала по πn.

О т в е т: $\left(-\frac{\pi}{2} + \pi n; -\operatorname{arctg} \frac{1}{2} + \pi n\right]$, $n \in \mathbb{Z}$.

Упражнения

Решите неравенства (**42—45**):

42. а) $\sin x \geqslant \frac{1}{2}$; г) $\sin\left(2x + \frac{\pi}{4}\right) < -\frac{1}{3}$; ж) $\operatorname{tg}\left(2x - \frac{\pi}{3}\right) \leqslant -\frac{1}{2}$;

б) $\cos x \leqslant -\frac{\sqrt{3}}{2}$; д) $\cos \frac{x}{3} \geqslant \frac{1}{5}$; з) $\operatorname{tg}\left(x + \frac{\pi}{4}\right) \geqslant \sqrt{3}$.

в) $\cos \frac{x}{2} > \frac{\sqrt{2}}{2}$; е) $\operatorname{ctg} \frac{x}{2} > -1$;

43. а) $|\sin x| \geqslant \frac{1}{2}$; б) $|\cos x| \leqslant \frac{1}{3}$; в) $|\operatorname{tg} x| \geqslant 1$; г) $|\sin x| < \frac{\sqrt{5}-1}{2}$.

44. а) $2 \sin^2 x - 3 \cos x - 1 \geqslant 0$; в) $\sin^2 x + \sin x - 3 < 0$;

б) $9 \cos^2 2x + 3 \cos 2x - 2 < 0$; г) $\sin^2 x + 3 \sin x + 2 \geqslant 0$.

45. а) $\sin x > \sin 1$; в) $\cos x < \cos 10$;

б) $\sin x \leqslant \sin 7$; г) $\cos x \geqslant \cos 5$.

Р е ш е н и е 45г. Отметим на тригонометрическом круге значение $\cos 5$. Поскольку $3\pi/2 < 5 < 2\pi$, то угол в 5 радиан находится в четвёртой четверти. Пусть на рис. 12 ему соответствует точка M. Следовательно, искомыми являются точки, находящиеся на дуге AM, включая концы (см. рис. 12). Мы должны описать дугу AM каким-либо отрезком, тогда решение неравенства можно будет получить путём прибавления к его концам по $2\pi n$. Заметим, что если двигаться по тригонометрической окружности в отрицательном направлении от Q до точки A, то точка также опишет дугу длиной 5 радиан. Поэтому точке A соответствуют числа вида $2\pi n - 5$, где $n \in \mathbb{Z}$. При этом только для значения $4\pi - 5$ длина отрезка $[5; 2\pi n - 5]$ оказывается больше 0 и меньше 2π. Значит, искомый отрезок можно описать, например, так: $[5; 4\pi - 5]$.

О т в е т: $[5 + 2\pi n; 4\pi - 5 + 2\pi n]$, $n \in \mathbb{Z}$.

46. Решите неравенства:

а) $\arcsin x \geqslant \frac{\pi}{6}$; б) $\arccos x \leqslant -\frac{1}{4}$;

в) $\arccos x > 0$; г) $\arcsin x < 2$.

Р е ш е н и е 46а. Проверим сначала, входит ли $\frac{\pi}{6}$ в область значений функции $\arcsin x$. Она принимает все значения из промежутка $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$.

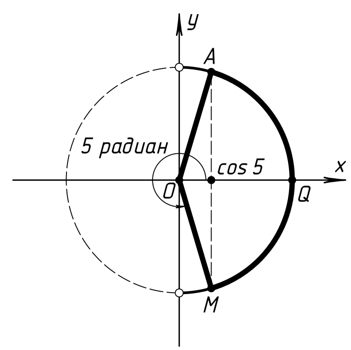

Рис. 12

Число $\frac{\pi}{6}$ попадает в этот промежуток, следовательно, неравенство имеет решения, причём множество решений не совпадает со всей областью определения (область определения $\arcsin x$ — отрезок $[-1; 1]$). Поскольку $\sin y$ — функция, монотонно возрастающая на промежутке $\left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$, то на области определения исходное неравенство равносильно неравенству $\sin(\arcsin x) \geqslant \sin\frac{\pi}{6}$ или $x \geqslant \sin\frac{\pi}{6} = \frac{1}{2}$.

Ответ: $\left[\frac{1}{2}; 1\right]$.

Замечание. Здесь приведено очень подробное решение. Когда вы будете сами решать аналогичные задачи, вовсе не обязательно писать решение с такой степенью подробности.

§ 5. Общие примеры решения тригонометрических неравенств

В большинстве случаев тригонометрические неравенства сводят при помощи тождественных тригонометрических и алгебраических преобразований к одному или нескольким простейшим неравенствам. В предыдущем параграфе мы разобрали, как получить решения таких неравенств. Выпишем теперь общие формулы.

1) $$\sin x \leqslant a.$$

- Если $|a| \leqslant 1$, то $-\pi - \arcsin a + 2\pi n \leqslant x \leqslant \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Если $a > 1$, то x — любое действительное число (или $x \in \mathbb{R}$).
- Если $a < -1$, то решений нет.

2) $$\sin x \geqslant a.$$

- Если $|a| \leqslant 1$, то $\arcsin a + 2\pi n \leqslant x \leqslant \pi - \arcsin a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Если $a > 1$, то решений нет.
- Если $a < -1$, то x — любое действительное число.

3) $$\cos x \leqslant a.$$

- Если $|a| \leqslant 1$, то $\arccos a + 2\pi n \leqslant x \leqslant 2\pi - \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Если $a > 1$, то x — любое действительное число.
- Если $a < -1$, то решений нет.

4) $$\cos x \geqslant a.$$

- Если $|a| \leqslant 1$, то $-\arccos a + 2\pi n \leqslant x \leqslant \arccos a + 2\pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.
- Если $a > 1$, то решений нет.
- Если $a < -1$, то x — любое действительное число.

5) $$\operatorname{tg} x \geqslant a.$$

- $\operatorname{arctg} a + \pi n \leqslant x < \frac{\pi}{2} + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

6) $$\operatorname{tg} x \leqslant a.$$

- $-\frac{\pi}{2} + \pi n < x \leqslant \operatorname{arctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

7) $$\operatorname{ctg} x \geqslant a.$$

- $\pi n < x \leqslant \operatorname{arcctg} a + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

8) $$\operatorname{ctg} x \leqslant a.$$

- $\operatorname{arcctg} a + \pi n \leqslant x < \pi + \pi n$, $n \in \mathbb{Z}$.

Очевидно, что если вместо нестрогих неравенств нам необходимо решить строгое неравенство, то в ответе все неравенства для x также будут строгими. Отметим ещё, что при $a = \pm 1$ формулы из пунктов 1—4 можно представить в более простом виде (запишите, например, решения неравенств $\sin x \leqslant 1$, $\cos x \leqslant -1$).

Обратите также внимание на то, что если неравенства для синуса и косинуса имеют решения далеко не всегда, то неравенства для тангенса и котангенса имеют решение при любом значении константы a.

Разберём ряд задач на тригонометрические неравенства.

47. Решите неравенство: $\frac{5}{4}\sin^2 x + \frac{1}{4}\sin^2 2x > \cos 2x$.

Решение. Используя формулу для синуса половинного угла и основное тригонометрическое тождество, перепишем исходное неравенств в виде $5(1-\cos 2x) + 2(1-\cos^2 2x) > 8\cos 2x$ или $2\cos^2 2x + 13\cos 2x - 7 < 0$. Заменив $\cos 2x$ на y, получим квадратное неравенство $2y^2 + 13y - 7 < 0$, решив которое, найдём, что $-7 < y < 1/2$.

Таким образом, нужно решить двойное неравенство $-7 < \cos 2x < 1/2$. Неравенство $-7 < \cos 2x$ выполняется при любом x. Для решения неравенства $\cos 2x < 1/2$ введём новую переменную $t = 2x$. Решением неравенства $\cos t < 1/2$ будет $\frac{\pi}{3} + 2\pi n < t < \frac{5\pi}{3} + 2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Значит, решением исходного неравенства является $\frac{\pi}{6} + \pi n < x < \frac{5\pi}{6} + \pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$.

Ответ: $\left(\frac{\pi}{6} + \pi n; \frac{5\pi}{6} + \pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

48. Решите неравенство: $5+2\cos 2x \leqslant 3|2\sin x-1|$.

Р е ш е н и е. Используя формулу косинуса двойного угла, перепишем исходное неравенство в виде $7-4\sin^2 x \leqslant 3|2\sin x-1|$. Положим $y=\sin x$, тогда неравенство перепишется как $7-4y^2 \leqslant 3|2y-1|$. Для освобождения от знака модуля рассмотрим два случая: $2y-1 \geqslant 0$ и $2y-1<0$.

1) $2y-1 \geqslant 0$ или $y \geqslant 1/2$. Тогда получим неравенство $7-4y^2 \leqslant 3(2y-1)$ или $2y^2+3y-5 \geqslant 0$. Решением этого неравенства будет $y \geqslant 1$ и $y \leqslant -5/2$, но в силу условия $y \geqslant 1/2$ получаем $y \geqslant 1$.

2) $2y-1<0$ или $y<1/2$. Тогда получим неравенство $7-4y^2 \leqslant -3(2y-1)$ или $2y^2-3y-2 \geqslant 0$. Решением этого неравенства будет $y \geqslant 2$ и $y \leqslant -1/2$, но в силу условия $y<1/2$ подходит только $y \leqslant -1/2$.

Таким образом, решениями неравенства относительно y являются $y \geqslant 1$ и $y \leqslant -1/2$. Заменяя в этих неравенствах y на $\sin x$, получаем, что решениями исходного неравенства будут все x, удовлетворяющие неравенству $\sin x \geqslant 1$ и все x, удовлетворяющие неравенству $\sin x \leqslant -1/2$.

Решениями второго неравенства будут все x из промежутков $-\frac{5\pi}{6}+2\pi n \leqslant x \leqslant -\frac{\pi}{6}+2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$, а решениями первого (равносильного равенству $\sin x=1$) — значения $x=\frac{\pi}{2}+2\pi k$, где $k \in \mathbb{Z}$.

О т в е т: $\left[-\frac{5\pi}{6}+2\pi n; -\frac{\pi}{6}+2\pi n\right] \cup \left\{\frac{\pi}{2}+2\pi k\right\}$, n, $k \in \mathbb{Z}$.

49. Решите неравенство $\sin^6 x+\cos^6 x>13/16$.

Р е ш е н и е. Преобразуем левую часть неравенства:

$$\sin^6 x+\cos^6 x=(\sin^2 x)^3+(\cos^2 x)^3=$$
$$=(\sin^2 x+\cos^2 x)(\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x)=$$
$$=\sin^4 x-\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x=\sin^4 x+2\sin^2 x\cos^2 x+\cos^4 x-$$
$$-3\sin^2 x\cos^2 x=(\sin^2 x+\cos^2 x)^2-\frac{3}{4}(2\sin x\cos x)^2=$$
$$=1-\frac{3}{4}\sin^2 2x=1-\frac{3}{4}\,\frac{1-\cos 4x}{2}=\frac{5}{8}+\frac{3\cos 4x}{8}.$$

Таким образом, нужно решить неравенство $\frac{5}{8}+\frac{3\cos 4x}{8}>\frac{13}{16}$. Преобразовывая, получаем неравенство $\cos 4x>1/2$. Положим $t=4x$, тогда, решая неравенство $\cos t>1/2$, имеем: $-\frac{\pi}{3}+2\pi n<t<\frac{\pi}{3}+2\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Следовательно, $-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}<x<\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}$, $n \in \mathbb{Z}$.

О т в е т: $\left(-\frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}; \frac{\pi}{12}+\frac{\pi n}{2}\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

50. Решите неравенство $\sin 2x+\operatorname{tg} x \geqslant 2$.

Р е ш е н и е. Левая часть неравенства определена при $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, где $n \in \mathbb{Z}$. Если $x \neq \frac{\pi}{2}+\pi n$, то $\sin 2x=\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}$. Поэтому исходное неравенство эквивалентно неравенству $\frac{2\operatorname{tg} x}{1+\operatorname{tg}^2 x}+\operatorname{tg} x-2 \geqslant 0$. Обозначим $y=\operatorname{tg} x$, тогда неравенство примет вид $\frac{2y}{1+y^2}+y-2 \geqslant 0$ или (так как $y^2+1>0$) $2y+(y-2)(y^2+1) \geqslant 0$. Раскрывая скобки, получим: $y^3-2y^2+3y-2 \geqslant 0$. Последнее неравенство можно переписать в виде $y^2(y-1)-y(y-1)+2(y-1) \geqslant 0$ или $(y^2-y+2)(y-1) \geqslant 0$. Поскольку квадратный трёхчлен y^2-y+2 положителен при любом y (так как дискриминант его отрицателен), то последнее неравенство равносильно неравенству $y-1 \geqslant 0$, откуда $\operatorname{tg} x-1 \geqslant 0$ или $\operatorname{tg} x \geqslant 1$. Решая это неравенство, получаем окончательный ответ.

О т в е т: $\left[\frac{\pi}{4}+\pi n; \frac{\pi}{2}+\pi n\right)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Кроме стандартных приёмов, при решении задач на тригонометрические неравенства иногда используют и «нестандартные» приёмы. Особенно часто их применяют при доказательстве тригонометрических неравенств.

Рассмотрим несколько таких задач.

51. Докажите неравенство: $0<\sin^8 x+\cos^{14} x \leqslant 1$.

Р е ш е н и е. Из свойств тригонометрических функций вытекает, что $\sin^2 x \leqslant 1$ и $\cos^2 x \leqslant 1$ для любых действительных x. Но так как $8>2$ и $14>2$, то отсюда следует, что $\sin^8 x \leqslant \sin^2 x$ и $\cos^{14} x \leqslant \cos^2 x$. Сложив почленно эти равенства и учитывая, что $\sin^2 x+\cos^2 x=1$, получим: $\sin^8 x+\cos^{14} x \leqslant 1$.

В силу $\sin^8 x \geqslant 0$ и $\cos^{14} x \geqslant 0$ имеем $\sin^8 x+\cos^{14} \geqslant 0$, причём равенство может выполняться только тогда, когда выполняются одновременно равенства $\sin^8 x=0$ и $\cos^{14} x=0$, что невозможно (почему?). Следовательно, $\sin^8 x+\cos^{14} x>0$.

Доказательство завершено.

52. Докажите неравенство $\cos(\sin x)>\sin(\cos x)$.

Р е ш е н и е. Перепишем исходное неравенство в виде $\cos(\sin x)-\sin(\cos x)>0$ или $2\sin\left(\frac{\pi}{4}+\frac{\sin x-\cos x}{2}\right)\sin\left(\frac{\pi}{4}-\frac{\sin x+\cos x}{2}\right)>0$. (Мы воспользовались формулой разности косинусов, а также тем, что $\sin\alpha=\cos\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)$.)

Покажем, что сомножители в левой части этого неравенства положительны. Поскольку $|\sin x - \cos x| = \left|\sqrt{2}\sin\left(\frac{\pi}{4} - x\right)\right| \leqslant \sqrt{2} < \frac{\pi}{2}$, то $-\frac{\pi}{4} < \frac{\sin x - \cos x}{2} < \frac{\pi}{4}$. Поэтому $0 < \frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2} < \frac{\pi}{2}$. Следовательно, $\sin\left(\frac{\pi}{4} + \frac{\sin x - \cos x}{2}\right) > 0$. Аналогично доказывается, что $0 < \frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2} < \frac{\pi}{2}$, откуда следует, что $\sin\left(\frac{\pi}{4} - \frac{\sin x + \cos x}{2}\right) > 0$.

Доказательство завершено.

Упражнения

Решите неравенства (**53—57**):

53. $\sqrt{\sin x} + \sqrt{\cos x} > 1$.

54. $\operatorname{tg} x \operatorname{tg} 3x < -1$.

55. $\operatorname{tg} 3x - \operatorname{tg} 2x - \operatorname{tg} x > 0$.

56. $\operatorname{arctg} \frac{x}{2} + \operatorname{arctg} \frac{x}{3} > \operatorname{arctg} x$.

57. $\frac{\cos^2 2x}{\cos^2 x} \geqslant 3 \operatorname{tg} x$.

58. Покажите, что $\operatorname{tg} 40^\circ + \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg} 50^\circ > 3$.

59. Решите неравенство $\operatorname{tg}(45^\circ - x) + \operatorname{tg} 45^\circ + \operatorname{tg}(45^\circ + x) > 3$.

60. Докажите, что $\frac{1}{8} < \sin 20^\circ \sin 50^\circ \sin 70^\circ < \frac{1}{4}$.

Решите неравенства (**61—66**):

61. $8 \sin^4 x - 8 \sin^2 x + \sin x - 1 < 0$.

62. $4 \sin x \sin 2x \sin 3x > \sin 4x$.

63. $\sin x + 2 \cos^2 x - \sin 3x > 1$.

64. $2 \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg}\left(\frac{x}{2} + 12^\circ\right) - \operatorname{tg}\left(\frac{x}{2} + 12^\circ\right) > 0$.

65. $\sin 4x + \cos 4x \operatorname{ctg} 2x > 1$.

66. $\sin^6 x + \cos^6 x > 5/6$.

67. Решите систему неравенств $\begin{cases} \sin 2x + \operatorname{tg} x \geqslant 2, \\ \cos x \operatorname{tg} 2x \leqslant 0. \end{cases}$

Решите неравенства (**68—69**):

68. $\operatorname{arctg}(\pi \operatorname{arctg} x) > 0$.

69. $\cos x \cos 2x \cos 4x \ldots \cos 2^n x < \frac{1}{2^{n+1} \sin x}$.

70. Докажите, что неравенство $\sin x \sin 2x \sin 3x < 3/4$ выполняется при любом x.

71. Докажите, что двойное неравенство $\frac{1}{3} < \frac{\operatorname{tg} 3x}{\operatorname{tg} x} < 3$ не выполняется ни при каком x.