МОСКОВСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ
имени М. В. ЛОМОНОСОВА
МАЛЫЙ МЕХАНИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЙ ФАКУЛЬТЕТ

ТОЖДЕСТВЕННЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

Методическая разработка
для учащихся 8 и 9 классов
заочного отделения

МОСКВА — 2007

УДК 51(023)
ББК 22.1
Т50

Т50 **Тождественные** преобразования: Методическая разработка для учащихся 8 и 9 классов заочного отделения МММФ / Под редакцией А. В. Деревянкина. — М.: Изд-во центра прикладных исследований при механико-математическом факультете МГУ, 2007. — 16 с.

В разработке рассмотрены задачи, связанные с тождественными преобразованиями числовых и алгебраических выражений: доказательствами тождеств, разложением на множители, преобразованиями выражений с радикалами.

ББК 22.1

Тождественные преобразования.

Редактор А. В. Деревянкин. Техн. редактор М. Ю. Панов.

Издательство ЦПИ при механико-математическом факультете МГУ.
Москва, Воробьёвы горы.

Отпечатано с оригинал-макета на типографском оборудовании механико-математического факультета и франко-русского центра им. А. М. Ляпунова.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ

При решении задач из самых разных разделов математики очень часто возникает необходимость использования тождественных преобразований. Упрощение выражений, разложение многочленов на множители, сокращение дробей — всё это примеры тождественных преобразований. Поэтому успешное владение приёмами, с помощью которых выполняются эти преобразования, очень важно. Ниже мы рассмотрим ряд таких приёмов.

Для начала введём несколько основных понятий, связанных с тождественными преобразованиями, и проиллюстрируем их примерами.

§ 1. Числовые выражения. *Числовое выражение* — запись, состоящая из чисел, знаков алгебраических действий и скобок. К знакам алгебраических действий (операций) относятся:

«$+$» (знак «плюс») — обозначает операцию сложения;

«$-$» (знак «минус») — обозначает операцию вычитания;

«$\cdot$» или «$\times$» (знаки умножения) — обозначают операцию умножения;

«$:$» или «$/$» (знаки деления), или «—» (знак дробной черты) — обозначают операцию деления;

«$\sqrt{\ }$» (знак радикала) — обозначает операцию извлечения корня.

Вот некоторые примеры числовых выражений:

$$7\cdot 2+8,\quad 5\cdot\sqrt[3]{27}-11,\quad \left(3:\sqrt{\frac{2+8}{7}}\right)^3.$$

Значение числового выражения — число, получающееся, если выполнить в данном выражении все входящие в него действия. Например, значением числового выражения $7\cdot 2+8$ является число 22; значением числового выражения $5\cdot\sqrt[3]{27}-11$ является число 4; что касается значения выражения $\left(3:\sqrt{\frac{2+8}{7}}\right)^3$, то это тоже некоторое число, которое, однако, так просто не записать: оно иррациональное. Напомним, что иррациональное число — это число, которое не представляется в виде дроби с целыми числителем и знаменателем. Десятичной записью такого числа является бесконечная непериодическая десятичная дробь.

Заметим, что не для любого числового выражения определено его значение. Причина этого заключается в том, что некоторые алгебраические действия определены не для всех чисел. Например, $\frac{2}{0}$, $\sqrt{-5}$ — числовые выражения, не имеющие смысла: их значение не определено. Выражение $\frac{2}{0}$ не имеет смысла, поскольку операция деления на ноль не определена, а $\sqrt{-5}$ не имеет смысла, поскольку не определено извлечение квадратного корня из отрицательного числа.

Числовым равенством называется запись вида

$$A=B, \tag{1}$$

где A и B — числовые выражения. Если хотя бы одно из выражений A и B не имеет смысла (т. е. его значение не определено), то говорят, что равенство (1) *не имеет смысла*. Если же оба выражения A и B имеют смысл, то и равенство (1) *имеет смысл*.

Если значения числовых выражений A и B равны, то равенство (1) называют *верным*; в противном случае его называют *неверным*.

Приведём примеры верных, неверных числовых равенств и равенств, вообще не имеющих смысла:

$3^2=2\cdot 7-\sqrt{25}$ — верное числовое равенство;

$2+7=21$ — неверное числовое равенство;

$\sqrt{-1}=1$, $\frac{3}{0}=\frac{3}{0}$ — числовые равенства, не имеющие смысла.

Вычислить числовое выражение — значит найти его значение, записанное в максимально простом виде. Если же исходное выражение не имеет смысла, то *вычислить* его — значит доказать, что оно не имеет смысла (ведь из громоздкой записи выражения сразу может быть и не видно, что его значение не определено).

Рассмотрим несколько примеров вычисления числовых выражений.

Пример 1. $\sqrt{(7\sqrt{9})^2-1100:2{,}5}-1=\sqrt{(7\cdot 3)^2-440}-1=$
$=\sqrt{441-440}-1=1-1=0.$

Пример 2. $\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}-3-\sqrt{2}=\frac{(\sqrt{2}+1)^2}{(\sqrt{2}-1)(\sqrt{2}+1)}-3-\sqrt{2}=\frac{3+2\sqrt{2}}{1}-$
$-3-\sqrt{2}=\sqrt{2}$. Число $\sqrt{2}$ — иррациональное, и поэтому дальнейшие преобразования мы провести уже не в состоянии: это наиболее простое числовое выражение с тем же значением, что и исходное.

§ 2. Алгебраические выражения. *Алгебраическое выражение* — запись, состоящая из чисел, переменных, знаков алгебраических действий и скобок, например:

$$ab^2+\frac{7c}{2}; \quad \sqrt{x}-\left(\frac{7}{y+3}\cdot 6x\right)^2; \quad s^3+s^2-s+7\sqrt{t}.$$

Заметим, что числовое выражение — частный случай алгебраического!

Понятие равенства для алгебраических выражений вводится так же, как и для числовых выражений. Дадим определение.

Алгебраическим равенством называется запись вида $A=B$, где A и B — алгебраические выражения.

При подстановке в алгебраическое выражение некоторых чисел в качестве значений переменных получится числовое выражение. Его значение назовём *числовым значением* алгебраического выражения при данных значениях переменных. Например, числовое значение выражения $\frac{a^2+\sqrt{b}}{c-2}$ при $a=3$, $b=9$, $c=8$ равно 2, ведь $\frac{3^2+\sqrt{9}}{8-2}=2$. При $a=1$, $b=1$, $c=1$ числовое значение этого выражения равно -2 (проверьте самостоятельно!); при $a=10$, $b=20$, $c=2$ числовое значение этого выражения не определено, так как при подстановке указанных значений a, b и c знаменатель дроби обращается в 0.

В случае алгебраического равенства уже не приходится говорить о том, является ли это равенство верным или нет, поскольку при подстановке различных значений переменных одно и то же алгебраическое равенство может обратиться как в верное числовое равенство, так и в неверное: например, алгебраическое равенство $a^2=2a$ станет верным числовым равенством при подстановке в качестве a чисел 0 или 2; при подстановке же любого другого значения a мы получим неверное числовое равенство. Однако для алгебраических выражений существует новое понятие: тождественного равенства.

Два алгебраических выражения называются *тождественно равными*, если они определены на одном и том же множестве значений переменных и принимают равные числовые значения при всех допустимых значениях переменных, входящих в них.

Примеры.

1) Выражения $3+x^2-2$ и x^2+1 являются тождественно равными.

2) Выражения $2(x+5)$ и $2x+10$ — тоже.

3) Выражения x^2+10 и $x+10$ не являются тождественно равными, так как, например, при $x=2$ их числовые значения различаются.

4) Выражения x и $\frac{x^2}{x}$ не являются тождественно равными, так как первое из них определено при $x=0$, а второе — нет.

Тождество — алгебраическое равенство, правая и левая части которого тождественно равны. Приведём примеры тождеств. Два из них мы можем автоматически получить из примеров, рассмотренных ранее:

$$3+x^2-2=x^2+1; \qquad 2(x+5)=2x+10$$

— это тождества. А вот ещё некоторые примеры тождеств:

$$(a+b)(a+c)=a^2+ab+ac+bc; \qquad \left(2{,}5+5\cdot\frac{6}{15}\right)^2=22-1{,}75.$$

Тождественное преобразование алгебраического выражения — замена этого выражения другим, тождественно равным ему.

Упростить алгебраическое выражение — значит заменить его на тождественно равное, но как можно более простое по записи. Как видно из определения, упрощение алгебраического выражения является тождественным преобразованием. Рассмотрим пример упрощения.

1. Упростить выражение $(x-y)(x+2y)-x^2+2y^2$.

Р е ш е н и е.

$$(x-y)(x+2y)-x^2+2y^2=x^2+2xy-xy-2y^2-x^2+2y^2=xy.$$

О т в е т: $(x-y)(x+2y)-x^2+2y^2=xy$.

С некоторыми видами тождественных преобразований вы уже знакомы: раскрытие скобок и, наоборот, вынесение общего множителя за скобку; домножение числителя и знаменателя дроби на одно и то же число, не равное 0 — всё это тождественные преобразования.

При проведении тождественных преобразований часто оказываются полезными формулы сокращённого умножения. Вот основные из них:

$$(A\pm B)^2=A^2\pm 2AB+B^2, \qquad (A\pm B)^3=A^3\pm 3A^2B+3AB^2\pm B^3,$$
$$(A+B+C)^2=A^2+B^2+C^2+2AB+2AC+2BC,$$
$$A^2-B^2=(A+B)(A-B), \qquad A^3\pm B^3=(A\pm B)(A^2\mp AB+B^2).$$

Отметим, что все эти формулы — тождества: они верны для любых значений A, B и C. Разберём пример их использования.

2. Упростить выражение: $x^3-1+x(x-1)-x^2(x+1)$.

Р е ш е н и е.

$$x^3-1+x(x-1)-x^2(x+1)=(x^2+x+1)(x-1)+x(x-1)-x^2(x+1)=$$
$$=(x^2+2x+1)(x-1)-x^2(x+1)=(x+1)^2(x-1)-x^2(x+1)=$$
$$=(x+1)((x+1)(x-1)-x^2)=(x+1)(x^2-1-x^2)=-(x+1).$$

О т в е т: $x^3-1+x(x-1)-x^2(x+1)=-(x+1)$.

§ 3. Условные тождества. Познакомимся ещё с одним видом алгебраических равенств — условными тождествами. Проще всего сделать это на конкретном примере. Возьмём равенство

$$\frac{x^2+y^2}{3x-y}=\frac{-x^2+2y^2}{2x}. \qquad (2)$$

Является ли оно тождеством? Несложно проверить, что нет: так, например, при $x=y=1$ значения правой и левой частей различаются. Наложим теперь некоторое дополнительное условие:

$$x+y=0. \qquad (3)$$

Посмотрим, будут ли правая и левая части соотношения (2) равны друг другу при условии, что выполняется равенство (3). Если оно

выполнено, то $y=-x$. Подставив это в равенство (2), преобразуем его левую часть (обозначим её через A) и правую (B):

$$A=\frac{x^2+y^2}{3x-y}=\frac{x^2+(-x)^2}{3x-(-x)}=\frac{x^2+x^2}{3x+x}=\frac{2x^2}{4x}=\frac{x^2}{2x};$$
$$B=\frac{-x^2+2y^2}{2x}=\frac{-x^2+2(-x)^2}{2x}=\frac{-x^2+2x^2}{2x}=\frac{x^2}{2x}.$$

Видим, что при выполнении условия (3) правая и левая части соотношения (2) тождественно равны между собой. Теперь мы можем ввести понятие условного тождества.

Условное тождество — алгебраическое равенство, правая и левая части которого тождественно равны при условии, что выполнено некоторое дополнительное соотношение (возможно, не одно, а несколько).

З а м е ч а н и е. Было бы ошибкой в рассмотренном примере продолжить при нахождении A и B преобразования и получить, сократив дроби, что $A=\frac{x}{2}$, $B=\frac{x}{2}$. Дело в том, что алгебраическое выражение $\frac{x}{2}$ определено при всех значениях x, в то время как $\frac{x^2}{2x}$ определено при $x\neq 0$. А у тождественно равных выражений, как сказано в определении, должны совпадать множества значений переменных, при которых они определены. Поэтому писать «$\frac{x^2}{2x}=\frac{x}{2}$» было бы неправильно. Можно, например, записать так: «$\frac{x^2}{2x}=\frac{x}{2}$ (при $x\neq 0$)».

В следующих параграфах мы более подробно познакомимся с некоторыми видами тождественных преобразований и их применением к решению задач.

Упражнения

3. Докажите тождества:

а) $a(b+c)^2+b(a+c)^2+c(a+b)^2-4abc=(a+b)(a+c)(b+c)$,

б) $(a+b+c)(ab+ac+bc)-abc=(a+b)(a+c)(b+c)$.

4. Упростите выражения:

а) $(x+y)(x-y+1)-(x-y)(x+y-1)$,

б) $(x+3y)(x+y+2)-(x+y)(x+3y+2)$,

в) $(x^4+2x^3+4x^2+8x+16)(x-2)$,

г) $(x+y+z)(x^2+y^2+z^2-xy-xz-yz)$.

5. Докажите условные тождества:

а) $a(a+b)(a+c)=b(b+a)(b+c)=c(c+a)(c+b)=abc$ при условии, что $a+b+c=0$,

б) $a^3+b^3+c^3=3abc$ при условии, что $a+b+c=0$,

в) $a^2(b+c)^2+b^2(a+c)^2+c^2(a+b)^2+(a^2+b^2+c^2)(ab+ac+bc)=0$ при условии, что $a+b+c=0$.

РАЗЛОЖЕНИЕ НА МНОЖИТЕЛИ

§ 4. Разложение квадратного трёхчлена на множители. Рассмотрим квадратный трёхчлен ax^2+bx+c $(a\neq 0)$. Как известно из курса алгебры, если дискриминант соответствующего квадратного уравнения

$$ax^2+bx+c=0 \qquad (4)$$

неотрицателен: $D=b^2-4ac\geqslant 0$, то этот трёхчлен можно разложить на множители: $ax^2+bx+c=a(x-x_1)(x-x_2)$, где x_1 и x_2 — корни уравнения (4): $x_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{D}}{2a}$. Если же дискриминант отрицателен, то разложить данный трёхчлен на множители невозможно.

Рассмотрим теперь трёхчлен вида ax^4+bx^2+c, где $a\neq 0$ (такой трёхчлен называется биквадратным). Сделав замену $y=x^2$, приведём его к уже рассмотренному виду: ay^2+by+c. И если уравнение

$$ay^2+by+c=0 \qquad (5)$$

имеет корни y_1 и y_2, то $ay^2+by+c=a(y-y_1)(y-y_2)$; тогда, с учётом того, что $y=x^2$, имеем: $ax^4+bx^2+c=a(x^2-y_1)(x^2-y_2)$, где, напомним, $y_{1,2}=\dfrac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}$. Если $y_1>0$ или $y_2>0$, то можно провести и дальнейшее разложение (подумайте, как). Разберём сказанное на примере.

6. Разложить на множители многочлен $2x^4-2x^2-24$.

Решение. Сделав замену $y=x^2$, получим многочлен $2y^2-2y-24$. Приравняв его к 0, найдём корни получившегося уравнения: $y_1=4$, $y_2=-3$. Тогда $2y^2-2y-24=2(y-4)(y+3)$, и $2x^4-2x^2-24=2(x^2-4)(x^2+3)$. Хотя мы уже разложили данный многочлен на два множителя, возможно и дальнейшее разложение, поэтому продолжаем: $2(x^2-4)(x^2+3)=2(x-2)(x+2)(x^2+3)$. Полученные многочлены уже невозможно разложить на множители (почему?).

Ответ: $2x^4-2x^2-24=2(x-2)(x+2)(x^2+3)$.

Замечание. Если в задании сказано «разложить на множители», то всегда подразумевается, что разложение следует проводить до тех пор, пока это возможно. После этого необходимо доказать невозможность дальнейшего разложения.

Заметим, что рассмотренный способ может помочь также и при разложении на множители некоторых других многочленов, приводимых заменой к виду ay^2+by+c: так, например, для трёхчлена $-x^6-4x^3+21$ следует воспользоваться заменой $y=x^3$, для трёхчлена $(x^2-x-1)^2-3(x^2-x-1)+2$ — заменой $y=x^2-x-1$, и т. п.

§ 5. Дополнение до квадрата суммы. Надо отметить, что описанный выше способ годится лишь для случая, когда уравнение (5) имеет корни. Однако если у него нет корней, то данный нам многочлен ax^4+bx^2+c, оказывается, всё равно можно разложить на множители! И поможет здесь *метод дополнения до квадрата суммы* (далее для краткости будем называть его просто *методом дополнения до квадрата*), применение которого проиллюстрируем на примере.

7. Разложить многочлен x^4+4 на множители.

Решение. Простая замена $y=x^2$ ничего в этом случае не даёт: мы получим двучлен y^2+4, который невозможно разложить. Поэтому будем действовать по-другому: попробуем дополнить данное выражение до квадрата. Здесь надо вспомнить формулу квадрата суммы, приведённую выше: $(A+B)^2=A^2+2AB+B^2$. Идея метода заключается вот в чём: постараемся добавить к выражению x^4+4 слагаемое вида bx^2, так чтобы выражение x^4+bx^2+4 являлось полным квадратом. И, чтобы равенство сохранилось, надо, конечно же, не забыть вычесть точно такое же слагаемое. С учётом формулы квадрата суммы видим, что в нашем случае $A^2=x^4$, $B^2=4$. Тогда $A=x^2$, $B=2$, и, значит, надо добавить слагаемое $2AB=2\cdot x^2\cdot 2=4x^2$. Итак,

$$x^4+4=x^4+4x^2+4-4x^2=(x^2+2)^2-(2x)^2=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2).$$

В последнем переходе была использована формула разности квадратов: $A^2-B^2=(A-B)(A+B)$. Дальнейшее разложение провести уже невозможно, так как получившиеся квадратные трёхчлены не имеют корней и, следовательно, не раскладываются на множители (напомним, что корнями многочлена $P(x)$, который содержит одну переменную x, называются корни уравнения $P(x)=0$).

Ответ: $x^4+4=(x^2-2x+2)(x^2+2x+2)$.

Заметим (не приводя доказательство этого факта), что если многочлен ax^4+bx^2+c не удаётся разложить на множители заменой $y=x^2$ по причине того, что получившийся квадратный трёхчлен не имеет корней, то его всегда можно разложить, дополнив до квадрата суммы.

Замечание. Из того, что $A^2=x^4$, $B^2=4$, ещё не следует, вообще говоря, что $A=x^2$, $B=2$. Может быть, например, $A=-x^2$, $B=-2$. Однако в данном случае это несущественно. От нас требовалось разложить данное выражение на множители, и мы это сделали. Возможно, другие варианты также привели бы к успеху, но это уже неважно: главное, что выбранный нами путь позволил решить задачу. Рекомендуем вам посмотреть, что будет получаться, если выбирать другие значения A и B: $A=x^2$, $B=-2$; $A=-x^2$, $B=2$; $A=-x^2$, $B=-2$.

Метод представления выражения в виде полного квадрата часто применяется и при упрощении числовых выражений. Рассмотрим пример.

8. Упростить выражение $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}$.

Р е ш е н и е. Имеем:

$$3+2\sqrt{2}=2+2\sqrt{2}+1=(\sqrt{2})^2+2\cdot\sqrt{2}\cdot 1+1^2=(\sqrt{2}+1)^2,$$

аналогично получаем, что $6-4\sqrt{2}=(\sqrt{2}-2)^2$. Тогда

$$\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=\sqrt{(\sqrt{2}+1)^2}+\sqrt{(\sqrt{2}-2)^2}=$$
$$=|\sqrt{2}+1|+|\sqrt{2}-2|=\sqrt{2}+1+(2-\sqrt{2})=3.$$

О т в е т: $\sqrt{3+2\sqrt{2}}+\sqrt{6-4\sqrt{2}}=3$.

З а м е ч а н и е. Обратите внимание, что при решении этой задачи было использовано одно очень важное соотношение: $\sqrt{a^2}=|a|$ (неправильно было бы полагать, что $\sqrt{a^2}$ равен a). Напомним в связи с этим определение модуля числа:

$$|a|=\begin{cases} a, & \text{если } a>0,\\ 0, & \text{если } a=0,\\ -a, & \text{если } a<0.\end{cases}$$

Таким образом, из определения модуля следует, что для любого числа a верно неравенство $|a|\geqslant 0$.

§ 6. Формула сложного радикала. Последний из рассмотренных примеров можно было бы решить и иначе, использовав формулу сложного радикала:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}. \qquad (6)$$

Докажем эту формулу. Для этого найдём, чему равен квадрат правой части равенства (6):

$$\left(\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right)^2=$$
$$=\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}+\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=$$
$$=\frac{a+\sqrt{a^2-b}+a-\sqrt{a^2-b}}{2}\pm 2\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}\cdot\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}=$$
$$=a\pm 2\sqrt{\frac{a^2-(\sqrt{a^2-b})^2}{4}}=a\pm 2\frac{\sqrt{a^2-(a^2-b)}}{2}=a\pm\sqrt{b}.$$

Итак, мы получили, что квадраты правой и левой частей соотношения (6) равны. Извлечём корень:

$$\sqrt{a\pm\sqrt{b}}=\left|\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}\right|=\sqrt{\frac{a+\sqrt{a^2-b}}{2}}\pm\sqrt{\frac{a-\sqrt{a^2-b}}{2}}.$$

(Подумайте, почему здесь можно так просто избавиться от знака модуля.)

Правда, полученная формула будет тождеством лишь при условии, что правая и левая её части определены на одном и том же множестве значений переменных. Левая часть определена, как несложно понять, при $a\geqslant\sqrt{b}$, правая — при $a^2-b\geqslant 0$, $a-\sqrt{a^2-b}\geqslant 0$, $a+\sqrt{a^2-b}\geqslant 0$. Оказывается (не будем приводить здесь доказательство этого факта), что, действительно, первое неравенство равносильно системе трёх остальных. Значит, правая и левая части нашей формулы и в самом деле являются тождественно равными выражениями.

Как правило, задачи, подобные задаче **8**, можно решить, представив подкоренное выражение в виде полного квадрата. Однако в некоторых случаях, когда такое представление сразу не видно, формула сложного радикала существенно облегчает решение задачи. Разберём характерный пример.

9. Упростить выражение $\sqrt{2\frac{1}{4}+\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{19}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}}$.

Р е ш е н и е. Преобразуем первое слагаемое по формуле сложного радикала:

$$\sqrt{2\frac{1}{4}+\sqrt{2}}=\sqrt{\frac{9/4+\sqrt{81/16-2}}{2}}+\sqrt{\frac{9/4-\sqrt{81/16-2}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{9/4+\sqrt{49/16}}{2}}+\sqrt{\frac{9/4-\sqrt{49/16}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{9/4+7/4}{2}}+\sqrt{\frac{9/4-7/4}{2}}=\sqrt{\frac{16/4}{2}}+\sqrt{\frac{2/4}{2}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}.$$

Теперь второе слагаемое:

$$\sqrt{\frac{19}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{\frac{19}{9}-\sqrt{\frac{8}{9}}}=$$
$$=\sqrt{\frac{19/9+\sqrt{361/81-8/9}}{2}}-\sqrt{\frac{19/9-\sqrt{361/81-8/9}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{19/9+\sqrt{289/81}}{2}}-\sqrt{\frac{19/9-\sqrt{289/81}}{2}}=$$
$$=\sqrt{\frac{19/9+17/9}{2}}-\sqrt{\frac{19/9-17/9}{2}}=\sqrt{\frac{36/9}{2}}-\sqrt{\frac{2/9}{2}}=\sqrt{2}-\frac{1}{3}.$$

Окончательно: $\sqrt{2\frac{1}{4}+\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{19}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\sqrt{2}+\frac{1}{2}-\left(\sqrt{2}-\frac{1}{3}\right)=\frac{5}{6}$.

О т в е т: $\sqrt{2\frac{1}{4}+\sqrt{2}}-\sqrt{\frac{19}{9}-\frac{2\sqrt{2}}{3}}=\frac{5}{6}$.

§ 7. Сокращение дробей. Пусть дана некоторая дробь $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — многочлены. Предположим, раскладывая числитель и знаменатель на множители, нам удалось выделить в них одинаковый множитель $R(x)$: $\dfrac{P(x)}{Q(x)}=\dfrac{P_1(x)\,R(x)}{Q_1(x)\,R(x)}$. Тогда, разделив числитель и знаменатель дроби на $R(x)$, мы получим дробь $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$. Деление числителя и знаменателя дроби на одно и то же выражение и называется её *сокращением*.

В сокращении дробей имеется один тонкий момент. Нам хочется, чтобы это сокращение было тождественным преобразованием. Однако при сокращении дроби множество значений переменной, на котором эта дробь определена, может измениться (см. замечание на стр. 7). Рассмотрим пример.

10. Сократить дробь $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}$.

Решение. Разложив числитель и знаменатель на множители, получим: $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}=\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}$. Сократим: $\dfrac{(x-1)(x+1)}{(x-1)(x+2)}=\dfrac{x+1}{x+2}$. Исходное выражение было определено при $x\neq-2$, $x\neq1$. Ограничение $x\neq-2$ сохраняется и для получившейся дроби, так как $x+2$ всё ещё стоит в знаменателе, а вот условие $x\neq1$ мы потеряли, и его надо добавить.

Ответ: $\dfrac{x^2-1}{x^2+x-2}=\dfrac{x+1}{x+2}$ (при $x\neq1$).

Замечание. Необходимость записывать ограничение в ответе возникает потому, что при $x=1$ исходное выражение не определено и не может равняться имеющему смысл выражению $\dfrac{x+1}{x+2}$. Поэтому нужно подчеркнуть, что записанное в ответе равенство выполняется не для всех значений x.

Не отличается от рассмотренной задача сокращения дробей и для случая, когда числитель и знаменатель зависят более, чем от одной переменной. Разберём ещё один пример.

11. Сократить дробь $\dfrac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2+2ab}$.

Решение. $$\frac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2+2ab}=\frac{(a^2-2ac+c^2)-b^2}{(a^2+2ab+b^2)-c^2}=\frac{(a-c)^2-b^2}{(a+b)^2-c^2}=$$
$$=\frac{(a-c-b)(a-c+b)}{(a+b-c)(a+b+c)}=\frac{(a+b-c)(a-b-c)}{(a+b-c)(a+b+c)}=\frac{a-b-c}{a+b+c}.$$

Ответ: $\dfrac{a^2-b^2+c^2-2ac}{a^2+b^2-c^2+2ab}=\dfrac{a-b-c}{a+b+c}$ (при $a+b-c\neq0$).

Упражнения

При выполнении упражнений не забывайте о том, что говорилось в замечаниях на стр. 7, 8, 10 и 12.

12. Разложите на множители:
а) x^2-5, б) x^4+1, в) x^4+3x^2-4,
г) x^4+2x^2+9, д) x^6+7x^3-8, е) $(x^2+x)^2+4(x^2+x)-12$,
ж) $(x^2+x+1)(x^2+x+2)-2$, з) $(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)-24$,
и) $x(x+2)-(y+1)(y-1)$, к) $x^2+xy-2y^2-x+y$,
л) $(x+y)z^2+(x+z)y^2+(y+z)x^2-(x+y)(x+z)(y+z)$,
м) $x^3+y^3+z^3-(x+y+z)^3$.

13. Добавьте вместо многоточий одночлены, так чтобы получились полные квадраты:
а) $y^2+\ldots+1$, б) $\ldots+4y^2+4$, в) $\ldots+2xy+4y^2$,
г) $\ldots+t+1$, д) $16a^2-\ldots+16$, е) $a^6-a^3+\ldots$,
ж) $\dfrac{9}{x^2}-\dfrac{6}{x}+\ldots$, з) $c^2+\ldots+\dfrac{1}{c^2}$, и) $4x^2-\dfrac{x}{2}+\ldots$

14. Сократите дроби:
а) $\dfrac{x^2-3x+2}{x^2+x-2}$, б) $\dfrac{2a^2-5ab+3b^2}{2a^2-ab-3b^2}$, в) $\dfrac{x^2+y^2+z^2+2xy+2xz+2yz}{x^2-y^2-z^2-2yz}$.

15. Упростите выражения:
а) $\dfrac{x^2-\frac{1}{x}}{x+\frac{1}{x}+1}$, б) $\dfrac{x-\frac{x-1}{x+1}}{1+\frac{x(x-1)}{x+1}}$, в) $\dfrac{x^4+9}{x^2+\sqrt6x+3}$, г) $\dfrac{x^2-y^2}{x-y}-\dfrac{x^3-y^3}{x^2-y^2}$,
д) $\dfrac{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}+\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}{\sqrt{\frac{x+2}{x-2}}-\sqrt{\frac{x-2}{x+2}}}$, е) $\dfrac{\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}+1\right)\left(\frac{1}{x}-\frac{1}{y}\right)^2}{\frac{x^2}{y^2}+\frac{y^2}{x^2}-\left(\frac{x}{y}+\frac{y}{x}\right)}$.

16. Вычислите $\sqrt{38-x^2}+\sqrt{17-x^2}$, если $\sqrt{38-x^2}-\sqrt{17-x^2}=3$.

17. Упростите выражения:
а) $\sqrt{(a^2-4)^2+16a^2}$, б) $\sqrt{(a^4+2)^2-8a^4}$,
в) $\sqrt{a^2+a+4+\sqrt{a^2-6a+9}}$, г) $\sqrt{10a+23+\sqrt{a^4+4a^2+4}}$,
д) $\sqrt{a+2\sqrt{a-1}}-\sqrt{a-1}$, е) $\sqrt{7+\sqrt{24}}$,
ж) $\sqrt{17-4\sqrt{9+4\sqrt5}}$, з) $\sqrt{3+\sqrt{5-\sqrt{13+\sqrt{48}}}}$, и) $\sqrt[4]{28-16\sqrt3}$.

18. Вычислите:
а) $\sqrt{5+4\sqrt{3-4\sqrt{4-2\sqrt3}}}-2\sqrt3$, б) $\sqrt[3]{20+14\sqrt2}+\sqrt[3]{20-14\sqrt2}$,
в) $\sqrt[3]{5\sqrt2+7}-\sqrt[3]{5\sqrt2-7}$.

19. Упростите выражения:
а) $\dfrac{\sqrt{a^4-6a^3+9a^2}+\sqrt{4a^4-4a^3+a^2}}{\sqrt{a^2+4a+4}}$ при условии, что $0{,}5<a<3$,
б) $\sqrt{\dfrac{3b+a^3}{2a}+\sqrt{3ab}}-\sqrt{\dfrac{3b+a^3}{2a}-\sqrt{3ab}}$.

ИЗБАВЛЕНИЕ ОТ ИРРАЦИОНАЛЬНОСТИ В ЗНАМЕНАТЕЛЕ ДРОБИ

Как уже отмечалось, иррациональное число — это число, которое нельзя представить в виде дроби с целыми числителем и знаменателем. Можно дать и равносильное определение: иррациональное число — это число, которое нельзя представить в виде дроби с целым числителем и натуральным знаменателем (напомним, что натуральные числа — это числа 1, 2, 3, ...). Предположим, нам дано выражение $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$, где $P(x)$ и $Q(x)$ — некоторые алгебраические (или числовые) выражения, причём $Q(x)$ содержит знаки радикала. *Избавиться от знаков радикала* (или, что то же самое, *избавиться от радикалов*) в знаменателе дроби $\dfrac{P(x)}{Q(x)}$ — значит представить её в виде тождественно равной ей дроби $\dfrac{P_1(x)}{Q_1(x)}$, где $Q_1(x)$ уже не содержит знаков радикала. Такое преобразование ещё называют *избавлением от иррациональности в знаменателе*. Заметим, что совсем не обязательно, чтобы числитель и знаменатель дроби зависели только от одной переменной.

Рассмотрим простейшие примеры избавления от знаков радикала в знаменателе дроби.

1) $$\frac{1}{\sqrt{x}}=\frac{\sqrt{x}}{x}.$$

2) $$\frac{1}{\sqrt{a}-b}=\frac{\sqrt{a}+b}{(\sqrt{a}-b)(\sqrt{a}+b)}=\frac{\sqrt{a}+b}{a-b^2}.$$

Однако надо заметить, что полученное равенство будет являться тождественно верным лишь при $\sqrt{a}+b\neq 0$. При $\sqrt{a}+b=0$ имеем: $\dfrac{1}{\sqrt{a}-b}=\dfrac{1}{-b-b}=\dfrac{1}{-2b}=-\dfrac{1}{2b}$. Итак,

$$\frac{1}{\sqrt{a}-b}=\begin{cases}\dfrac{\sqrt{a}+b}{a-b^2}, & \text{если } \sqrt{a}+b\neq 0,\\[2mm] -\dfrac{1}{2b}, & \text{если } \sqrt{a}+b=0.\end{cases}$$

3) $$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}{(\sqrt{a}+\sqrt[4]{b})(\sqrt{a}-\sqrt[4]{b})}=\frac{\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}}{a-\sqrt{b}}=$$
$$=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt[4]{b})(a+\sqrt{b})}{(a-\sqrt{b})(a+\sqrt{b})}=\frac{(\sqrt{a}-\sqrt[4]{b})(a+\sqrt{b})}{a^2-b}.$$

Как и в предыдущем равенстве, надо выделить особые случаи. При $\sqrt{a}-\sqrt[4]{b}=0$, т. е. при $a=\sqrt{b}$, имеем: $\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}=\dfrac{1}{\sqrt{a}+\sqrt{a}}=\dfrac{1}{2\sqrt{a}}$; случай $a+\sqrt{b}=0$ невозможен, так как исходная дробь определена лишь при $a\geqslant 0$ (ведь a стоит под знаком квадратного корня), и потому $a+\sqrt{b}$ может обратиться в 0 только при $a=0$ и $b=0$, но тогда знаменатель исходной дроби будет равен 0, что недопустимо. Окончательно:

$$\frac{1}{\sqrt{a}+\sqrt[4]{b}}=\begin{cases}\dfrac{(\sqrt{a}-\sqrt[4]{b})(a+\sqrt{b})}{a^2-b}, & \text{если } a-\sqrt{b}\neq 0,\\[2mm] \dfrac{1}{2\sqrt{a}}, & \text{если } a-\sqrt{b}=0.\end{cases}$$

А вот пример избавления от радикалов в числовом выражении.

4) $$\frac{1}{2\sqrt{1+\sqrt{2}}}=\frac{\sqrt{1+\sqrt{2}}}{2(1+\sqrt{2})}=\frac{(\sqrt{1+\sqrt{2}})(1-\sqrt{2})}{2(1+\sqrt{2})(1-\sqrt{2})}=$$
$$=\frac{(\sqrt{1+\sqrt{2}})(1-\sqrt{2})}{-2}=\frac{(\sqrt{1+\sqrt{2}})(\sqrt{2}-1)}{2}.$$

Следующий пример нуждается в некоторых комментариях.

20. Избавьтесь от радикалов в выражении $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}}$.

Решение. Поскольку $-b$ стоит под знаком квадратного корня, то данное выражение имеет смысл только при $-b\geqslant 0$, откуда $b\leqslant 0$. Однако b не может равняться 0, так как в этом случае знаменатель дроби обратился бы в 0. Поэтому $b<0$. $ab\geqslant 0$ (это выражение также стоит под корнем), и тогда, с учётом того, что $b<0$, получаем: $a\leqslant 0$. Известна формула $\sqrt{xy}=\sqrt{x}\sqrt{y}$, если $x\geqslant 0$, $y\geqslant 0$.

В нашем случае $a\leqslant 0$, $b<0$, тогда $-a\geqslant 0$, $-b>0$, и, применив эту формулу, имеем: $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}}=\dfrac{\sqrt{(-a)(-b)}}{\sqrt{-b}}=\dfrac{\sqrt{-a}\sqrt{-b}}{\sqrt{-b}}=\sqrt{-a}$ (при $b<0$).

Ответ: $\sqrt{-a}$ (при $b<0$).

Замечание. Здесь очень важно было учесть знаки чисел a и b! Неправильно было бы, например, записать, что $\sqrt{ab}=\sqrt{a}\sqrt{b}$: ведь это равенство верно только при $a\geqslant 0$, $b\geqslant 0$. Если бы мы сделали такое преобразование в нашей задаче, то вышло бы, что под корнем стоит отрицательная величина b $\left(\text{раньше было показано, что } \dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-b}} \text{ определено}\right.$ лишь при $\left.b<0\right)$, т. е. мы получили бы выражение, не имеющее смысла.

Упражнения

При выполнении упражнений не забывайте о том, что говорилось в замечаниях на стр. 7, 10, 12 и 15.

21. Избавьтесь от знаков радикала в знаменателях числовых выражений:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{8}}$, б) $\dfrac{1}{5-2\sqrt{6}}$, в) $\dfrac{1}{\sqrt{5}-\sqrt{7}}$,

г) $\dfrac{\sqrt{\sqrt{15}+\sqrt{6}}}{\sqrt{\sqrt{15}-\sqrt{6}}}$, д) $\dfrac{50}{3+\sqrt{2}-\sqrt{1+\sqrt{2}}}$, е) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}-\sqrt{3}}$,

ж) $\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}-\sqrt{5}}$, з) $\dfrac{1}{\sqrt[3]{3}+\sqrt[3]{6}+\sqrt[3]{9}}$.

22. Докажите равенства:

а) $\dfrac{1}{\sqrt{6}-\sqrt{5}}=\dfrac{3}{\sqrt{5}-\sqrt{2}}+\dfrac{4}{\sqrt{6}+\sqrt{2}}$, б) $\dfrac{2\sqrt{9+\sqrt{65}}}{\sqrt{19}-\sqrt{3}}=\dfrac{\sqrt{19}+\sqrt{3}}{2\sqrt{9-\sqrt{65}}}$,

в) $\dfrac{1}{1+\sqrt{2}}+\dfrac{1}{\sqrt{2}+\sqrt{3}}+\dfrac{1}{\sqrt{3}+\sqrt{4}}+\ldots+\dfrac{1}{\sqrt{98}+\sqrt{99}}+\dfrac{1}{\sqrt{99}+\sqrt{100}}=9.$

23. Избавьтесь от знаков радикала в знаменателях выражений, а затем упростите их:

а) $\dfrac{ab}{\sqrt{a}}$, б) $\dfrac{\sqrt{ab}}{\sqrt{-a}}$, в) $\dfrac{a+\sqrt{ab}}{b+\sqrt{ab}}$, г) $\dfrac{a-b}{\sqrt{-a}-\sqrt{-b}}$,

д) $\dfrac{\sqrt{(a+c)(c+b)}+\sqrt{(a-c)(c-b)}}{\sqrt{(a+c)(c+b)}-\sqrt{(a-c)(c-b)}}$, при условии $a>b>0$, $c=\sqrt{ab}$,

е) $\left(\dfrac{\sqrt{a}}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}+\dfrac{\sqrt{b}}{\sqrt{a}-\sqrt{b}}+\dfrac{2\sqrt{ab}}{a-b}\right)\left(\sqrt{a}-\dfrac{\sqrt{ab}+b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}\right)$.