ПРОЕКТИРОВАНИЕ В СТЕРЕОМЕТРИИ

П.А. Бородин, А.В. Макаров, В.А. Прошкин

§1. Параллельное проекция

Пусть в пространстве задана плоскость Π и не параллельная ей прямая v. Тогда каждой точке A пространства соответствует единственная точка A', лежащая в плоскости Π и такая, что прямая AA' параллельна прямой v (рис. 1). Точка A' называется *проекцией* точки A на плоскость Π *вдоль направления* v, а отображение $A \to A'$, заданное на всех точках A пространства, называется *параллельным проектированием* пространства на плоскость Π вдоль направления v. При этом плоскость Π называется *экраном*, а прямая v — *направлением проектирования.*

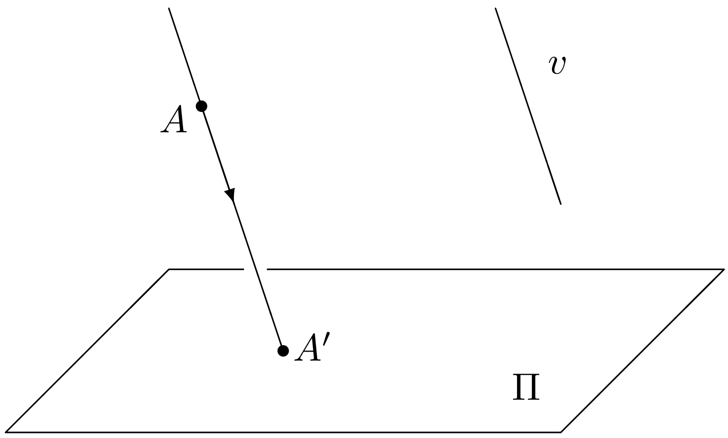


Рис. 1

Если пространственную фигуру F параллельно спроектировать на плоскость Π вдоль некоторого направления, то получится лежащая в этой плоскости проекция F', называемая также *изображением* фигуры F.

Перечислим без доказательства основные свойства параллельного проектирования[1].

1. При параллельном проектировании прямые переходят в прямые или точки. Прямая переходит в точку в том и только в том случае,

[1] Некоторые из этих свойств доказаны в п. 142 §16 учебника А.В. Погорелова "Геометрия 7–11".

когда она параллельна направлению проектирования. Отрезки переходят в отрезки или точки.

2. Если прямые a и b параллельны, то их изображения a' и b' оба являются либо точками, либо параллельными прямыми.

3. Если отрезки AB и CD параллельны, то отношение их длин при параллельном проектировании сохраняется:

$$A'B' : C'D' = AB : CD$$

(в частности, если $A'B' = 0$, то и $C'D' = 0$).

4. Если отрезок AB (угол $\angle ABC$) параллелен экрану Π, то $A'B' = AB$ ($\angle A'B'C' = \angle ABC$). В общем случае длины отрезков, величины углов и площади плоских фигур при параллельном проектировании не сохраняются.

Пример 1. *Спроектировать куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на плоскость AA_1C_1C параллельно диагонали BD_1.*

Решение. Точки A,A_1,C_1,C уже лежат на экране, поэтому $A' = A$,$A_1' = A_1$,$C_1' = C_1$,$C' = C$ (рис. 2).

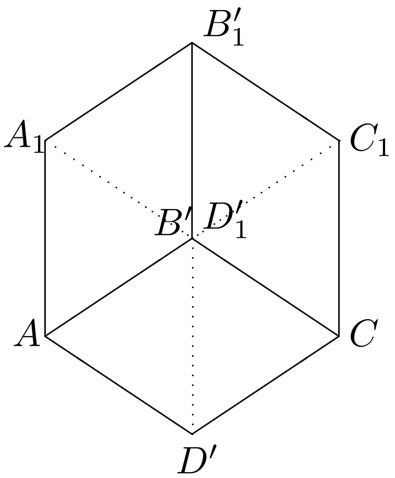


Рис. 2

Прямая BD_1 пересекает отрезок AC_1 в его середине (ABC_1D_1 — прямоугольник), поэтому эта середина и будет изображением точек B и D_1. Отрезки BB_1, DD_1 параллельны и равны отрезку AA_1. Следовательно, по свойствам 2 и 3 отрезки $B'B_1'$, $D'D_1'$ параллельны и равны отрезку $A'A_1'$. Этим изображения B_1' и D' определяются однозначно (рис. 2). Получилось одно из изображений куба (не самое удачное) на геометрическом чертеже.

Пример 2. *Может ли окружность радиуса* $2\,$*м перейти при параллельном проектировании в окружность радиуса* $1\,$*м ?*

Ответ: нет.

Решение. Пусть α — плоскость исходной окружности радиуса $2\,$м. Если α параллельна Π, то по свойству 4 изображением этой окружности будет такая же окружность радиуса $2\,$м. Если α не параллельна Π, то α и Π пересекаются по некоторой прямой. В окружности есть диаметр d, параллельный этой прямой, а значит, и экрану Π. По свойству 4 его изображение d' имеет длину $2\,$м и в то же время является хордой в изображении окружности. Значит, это изображение не может быть окружностью радиуса $1\,$м.

Пример 3. *Может ли окружность* C *радиуса* $1\,$*м перейти при параллельном проектировании в окружность* C' *радиуса* $2\,$*м ?*

Ответ: нет.

Решение. Если бы такая проекция существовала, то, взяв в качестве экрана плоскость исходной окружности и сохранив направление, мы получили бы проектирование, в котором изображением окружности C' является C, невозможность чего доказана в предыдущей задаче.

Вообще при параллельном проектировании окружности на экране получается не окружность, а так называемый *эллипс*. С эллипсами часто приходится иметь дело в повседневной жизни: всевозможные круги (крышки, тарелки, колеса и т.п.), проектируясь (правда, не параллельно) на сетчатку глаза, представляются нам как эллипсы; если разрезать цилиндрическую трубку под любым наклоном, то в сечении получится эллипс, и т.д.

Пример 4. *Пусть заданы два треугольника* Δ_1 *и* Δ_2*. Можно ли подобрать параллельное проектирование (то есть экран и направление), при котором треугольник* Δ_1 *переходил бы в треугольник, подобный треугольнику* Δ_2*?*

Ответ: можно.

Решение. Расположим треугольник $\Delta_1 = ABC$ в какой-нибудь плоскости α, и возьмем в качестве экрана произвольную плоскость Π, проходящую через прямую AB и отличную от α (рис. 3).

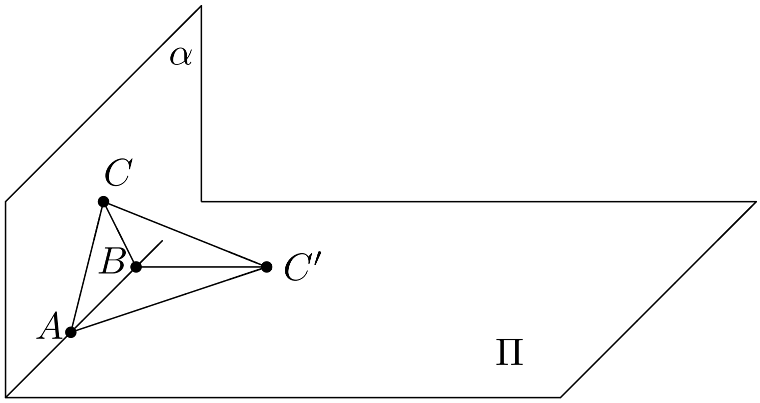
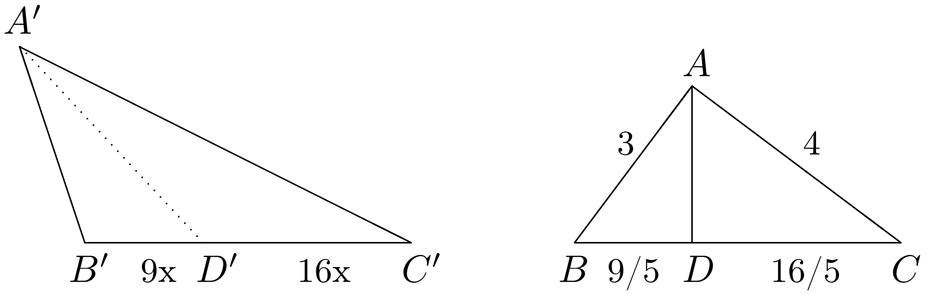


Рис. 3

Выберем в Π такую точку C', чтобы треугольник ABC' был подобен треугольнику Δ_2. Тогда проектирование на Π вдоль направления CC' будет искомым: точки A и B переходят в себя, а точка C — в точку C'.

Отдельный тип задач представляют собой задачи на построение элементов изображений, когда на заданном изображении F' известной фигуры F требуется построить (циркулем и линейкой) изображения каких-то элементов фигуры F.

Пример 5. *Дано изображение $A'B'C'$ треугольника ABC со сторонами $AB = 3$, $AC = 4$, $BC = 5$ (рис. 4а). Построить изображение $A'D'$ высоты AD, опущенной на сторону BC.*



а)

б)

Рис. 4

Решение. Исходный треугольник — прямоугольный, и высота AD делит гипотенузу BC на отрезки длины $3 \cdot \frac{3}{5} = \frac{9}{5}$ и $4 \cdot \frac{4}{5} = \frac{16}{5}$ (рис.

4б). По свойству 3 изображение D' точки D должно делить отрезок $B'C'$ в том же отношении $\frac{9}{5} : \frac{16}{5} = 9 : 16 = B'D' : D'C'$. Поэтому надо разделить $B'C'$ в этом отношении (что делается циркулем и линейкой) и соединить A' с D'.

Пример 6. *Дано изображение окружности. Построить изображение ее центра.*

Решение. Проведем в изображении две параллельные хорды a' и b' (рис. 5).

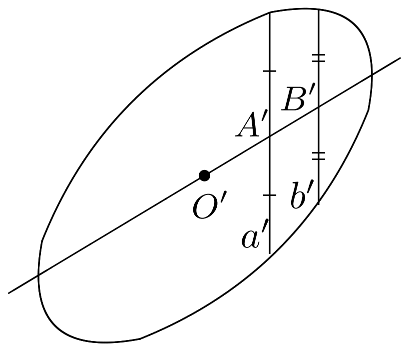


Рис. 5

Они являются изображениями параллельных хорд a и b исходной окружности. Середины A и B соответственно хорд a и b лежат на диаметре. Следовательно, их изображения A' и B' лежат на изображении этого диаметра. По свойству 3 точки A' и B' — середины хорд a' и b' соответственно, их можно построить на нашем изображении. Проведя прямую $A'B'$, получим изображение d' диаметра. Середина O' отрезка d' по свойству 3 является искомым изображением центра окружности.

Задачи к § 1

1. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$. На диагонали AC квадрата $ABCD$ взята точка D_2 так, что $AD_2 = \frac{1}{2}AB$. Спроектировать куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ на плоскость $ABCD$ параллельно A_1D_2.

2. Спроектировать куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ вдоль прямой AC_1 на плоскость, ей перпендикулярную.

3. Дан параллелепипед $ABCDA_1B_1C_1D_1$, P — точка пересечения диагонали AC_1 с плоскостью A_1BD. Доказать, что $AP = AC_1/3$.

4. Может ли треугольник площади $1\,\text{м}^2$ при параллельном проектировании перейти в треугольник площади а) $1\,\text{см}^2$; б) $2\,\text{м}^2$?

5. Можно ли треугольник со сторонами 3, 4, 5 параллельно спроектировать в треугольник со сторонами 5,12,13?

6. Можно ли произвольную трапецию спроектировать в а) равнобокую; б) прямоугольную?

7. Доказать, что параллельная проекция треугольной пирамиды вдоль прямой, проходящей через середины двух скрещивающихся ребер, на любую плоскость, не параллельную этой прямой, — это параллелограмм с диагоналями.

8. Плоскость, проходящая через середины ребер AB и CD тетраэдра $ABCD$ пересекает ребра AD и BC в точках L и N. Докажите, что $BC : CN = AD : DL$.

9. Трапеция $A'B'C'D'$ $(A'B' \| C'D')$ служит изображением равнобедренной трапеции, углы при основании которой равны $45°$. Постройте изображение центра окружности, описанной вокруг трапеции.

10. Треугольник $A'B'C'$ служит изображением треугольника со сторонами 6, 7, 8. Постройте изображение медиан, биссектрис и высот этого треугольника.

11. Дано изображение окружности с точкой A на ней. Построить изображение касательной, проведенной к окружности в точке A.

12. Дано изображение окружности с точкой A в ее внешности. Построить изображение касательных, проведенных к окружности через точку A.

13. Дано изображение двух взаимно внешних окружностей, лежащих в одной плоскости. Построить изображение их общих касательных.

14. Дана параллельная проекция произвольной пирамиды $SABC$. Точки P,Q,L,N лежат соответственно на ребрах SA,BC,SB,AC. Как по изображению точек P, Q,L,N определить, пересекаются ли отрезки PQ и LN?

§2. Ортогональная проекция

Параллельная проекция называется *ортогональной*, если направление проектирования перпендикулярно плоскости экрана.

В школьных учебниках (см., например, учебник А.В.Погорелова) доказывается, что площадь S плоского многоугольника $A_1A_2...A_n$ и площадь S' его ортогональной проекции $A'_1A'_2...A'_n$ на некоторую плоскость связаны формулой $S' = S\cos\varphi$, где φ — угол между плоскостями исходного многоугольника и его изображения.

Обобщим этот результат на произвольную параллельную проекцию, а именно, докажем, что для любой параллельной проекции данной плоскости α на плоскость β существует такая константа k (зависящая от α, β и направления проектирования), что площадь S любого многоугольника F на плоскости α и площадь S' его изображения на β связаны соотношением $S' = kS$.

Пусть γ_1 — угол между направлением проектирования v и α, γ_2 — угол между v и β. Докажем, что $k = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}$. Рассмотрим плоскость μ, перпендикулярную v. Тогда угол между μ и α равен $\frac{\pi}{2} - \gamma_1$, а угол между μ и β равен $\frac{\pi}{2} - \gamma_2$. Так как $S\cos(\frac{\pi}{2} - \gamma_1) = S'\cos(\frac{\pi}{2} - \gamma_2)$, то $S' = \frac{\sin\gamma_1}{\sin\gamma_2}S$.

Ортогональная проекция используется для определения расстояния между скрещивающимися прямыми l и m. Для этого берут плоскость α, перпендикулярную, например, прямой m, и проектируют прямые l и m ортогонально на эту плоскость. Прямая m проектируется в точку M, а прямая l в прямую l_1. Тогда расстояние между прямыми l и m равно расстоянию от точки M до прямой l_1, так как общий перпендикуляр к прямым l и m параллелен плоскости α.

Пример 7. *Дан октаэдр $SABCDF$ с ребрами, равными 1. Пусть E — середина SC, точка Q лежит на ребре SD, причем $SQ : QD = 2 : 1$. Найти расстояние между прямой EQ и прямой SF.*

Ответ: $\sqrt{2}/5$.

Решение. Спроектируем октаэдр ортогонально на плоскость $ABCD$ (рис. 6).

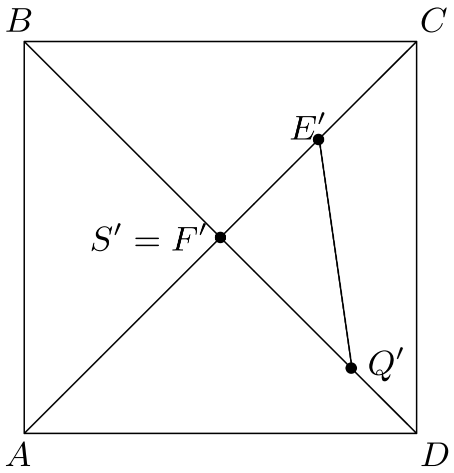


Рис. 6

Искомое расстояние равно расстоянию от точки S' до прямой $E'Q'$. Рассмотрим прямоугольный $\Delta E'S'Q'$. Имеем $E'S' = \frac{\sqrt{2}}{4}$, $Q'S' = \frac{\sqrt{2}}{3}$, $(E'Q')^2 = (E'S')^2 + (Q'S')^2 = \frac{25}{72}$. Отсюда легко находим высоту h треугольника $E'S'Q'$, опущенную на гипотенузу $E'Q'$: $h = \frac{E'S' \cdot Q'S'}{E'Q'} = \frac{\sqrt{2}}{5}$.

Пример 8. *Пусть в тетраэдре $ABCD$ прямые AB и CD, а также прямые AD и BC перпендикулярны. Доказать, что все четыре высоты тетраэдра DF, CE, BQ и AP пересекаются в одной точке, и, кроме этого, прямые AC и BD также перпендикулярны.*

Решение. Ортогонально спроектируем тетраэдр $ABCD$ на плоскость ABC (нарисуйте проекцию). Так как $AD \perp BC$, то $AD' \perp BC$ (по теореме, что если наклонная перпендикулярна прямой, то и проекция наклонной перпендикулярна этой прямой). Высота AP перпендикулярна прямой BC. Поэтому и ее проекция AP' перпендикулярна BC. Следовательно, AP пересекает DF и точка пересечения проектируется в точку D'.

Так как CD перпендикулярно AB, то CD' перпендикулярно AB (по теореме, что если наклонная перпендикулярна прямой, то и проекция наклонной перпендикулярна этой прямой). Высота CE перпендикулярна прямой AB. Поэтому и ее проекция CE' перпендикулярна AB. Следовательно, CE пересекает DF и точка пересечения проектируется в точку D'. Кроме того, очевидно, что точка D' есть точка пересечения высот треугольника ABC.

Следовательно, BD' перпендикулярна AC. Поэтому BD

перпендикулярна AC (по теореме о том, что если проекция наклонной перпендикулярна прямой, то и сама наклонная перпендикулярна этой прямой). Высота BQ перпендикулярна прямой AC. Поэтому и ее проекция BQ' перпендикулярна AC. Следовательно, BQ пересекает DF и точка пересечения проектируется в точку D'.

Аналогично, можно рассмотреть ортогональную проекцию тетраэдра $ABCD$ на плоскость ABD. Аналогично предыдущему мы докажем тогда, что три высоты AP, DF, BQ пересекают высоту CE и точки пересечения проектируются в точку C'. Так как по двум проекциям D' и C' исходная точка восстанавливается однозначно, то отсюда получаем, что все четыре высоты AP, DF, BQ и CE пересекаются в одной точке, совпадающей с точкой пересечения высот DF и CE.

Задачи к § 2

1. Длины ребер прямоугольного параллелепипеда есть a,b,c. Длина его диагонали d. Доказать, что $d^2 = a^2 + b^2 + c^2$.

2. Дан прямой трехгранный угол $Oxyz$(т.е.$Ox \perp Oz$,$Oy \perp Oz$, $Ox \perp Oy$). Луч OM образует с ребрами этого трехгранного угла углы величиной α,β,γ. Доказать, что $cos^2\alpha + cos^2\beta + cos^2\gamma = 1$.

3. В тетраэдре $ABCD$ все плоские углы при вершине D прямые. Доказать, что $S^2_{ABC} = S^2_{ABD} + S^2_{ACD} + S^2_{BCD}$

4. Как связана площадь фигуры с площадями ее ортогональных проекций на три попарно перпендикулярные плоскости? Рассмотреть сначала случай, когда фигура является треугольником.

5. Как расположить в пространстве куб, чтобы его ортогональная проекция на данную плоскость имела бы наибольшую площадь?

6. Куб проектируется на плоскость. Доказать, что сумма квадратов длин проекций его ребер равна $8a^2$, где a — длина ребра куба.

7. Пусть заданы два треугольника Δ_1 и Δ_2. Можно ли подобрать ортогональное проектирование, при котором треугольник Δ_1 переходил бы в треугольник, подобный треугольнику Δ_2?

8. Дан куб $ABCDA_1B_1C_1D_1$ с ребром a. Найти а) расстояние между прямыми AB_1 и A_1C; б) расстояние между прямыми B_1C и DC_1; в) расстояние между BM и A_1D, где M — середина AA_1 .

9. Ребро SC тетраэдра $SABC$ перпендикулярно плоскости ABC, K — середина SB, N - середина AB, L делит ребро SC в отношении $CL : LS = 1 : 2$. Доказать, что прямая CN равноудалена от прямых AK и BL.

10. Дан правильный тетраэдр $SABC$. SM,AN,BQ — медианы граней SAB,ABC,SBC соответственно. Найдите расстояния между SM и AN, а также между SM и BQ, если ребро тетраэдра равно a.

11. В кубе $ABCDA_1B_1C_1D_1$ проведены общий перпендикуляр PQ прямые A_1B, B_1C и общий перпендикуляр PQ к ним (точка P лежит на прямой A_1B). Найдите отношение A_1P к PB.

12. Сформулируйте и докажите утверждение, обратное к утверждению из примера 8.

§3. Проекция на прямую

Проектирование трехмерного пространства на данную прямую l параллельно данной плоскости α, не параллельной l, задается следующим образом. Пусть A — произвольная точка трехмерного пространства. Рассмотрим плоскость β, содержащую A и параллельную плоскости α. Тогда β пересекает l в точке A'. Точку A' и назовем параллельной проекцией точки A на прямую l параллельно плоскости α. Очевидно, что плоскости при этом проектируются во всю прямую l или в точку. Прямые проектируются либо во всю прямую l, либо в точку. Отрезки проектируются либо в отрезки, либо в точки. Основное свойство параллельного проектирования на прямую — сохранение отношения длин параллельных отрезков (см. свойство 3 параллельной проекции выше).

Пример 9. *$SABC$ — тетраэдр. Плоскость α пересекает ребра SA, SB, CB и CA в точках K, L, M, N соответственно. Доказать, что*

$$\frac{SK}{KA}\cdot\frac{AN}{NC}\cdot\frac{CM}{MB}\cdot\frac{BL}{LS}=1.$$

Решение. Спроектируем тетраэдр $SABC$ на прямую AC параллельно плоскости α. При этом точки K, L, M, N спроектируются в точку N. Точки A и C спроектируются сами в себя. Точки S и B спроектируются в точки S' и B' (см. рис. 7).

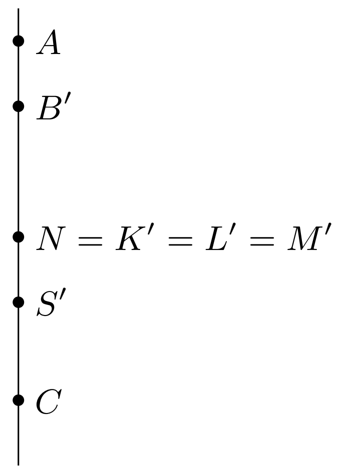


Рис. 7

По свойству параллельной проекции на прямую получаем

$$\frac{SK}{KA} \cdot \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CM}{MB} \cdot \frac{BL}{LS} = \frac{S'N}{NA} \cdot \frac{AN}{NC} \cdot \frac{CN}{NB'} \cdot \frac{B'N}{NS'} = 1.$$

Задачи к § 3

1. Куб ортогонально проектируется на прямую. Доказать, что сумма квадратов длин проекций его ребер равна $4a^2$, где a — длина ребра куба.

2. Для каждой грани тетраэдра построен вне его вектор, перпендикулярный этой грани и численно равный его площади. Доказать, что сумма этих четырех векторов равна 0.

3. Сфера касается ребер SA,SB,CB,CA тетраэдра в точках K,L,M,N соответственно. Докажите, что точки K,L,M,N лежат в одной плоскости.

4. В основании пирамиды лежит многогранник с нечетным числом сторон. Можно ли на ее ребрах так расставить стрелки, чтобы сумма полученных векторов равнялась бы нулю?

§4. Применение проектирования в задачах вступительных экзаменов и олимпиад

В следующих задачах проектирование на плоскость или прямую либо фигурирует в условии, либо является ключевым средством решения.

1. (биологический факультет 1998) Угол наклона всех боковых граней пирамиды $SABC$ одинаков и равен $\operatorname{arctg}\sqrt{2}$. Основанием пирамиды является прямоугольный треугольник ABC ($\angle ABC = 90°$); SO — высота пирамиды. Найти площадь боковой поверхности пирамиды, если $OB = \sqrt{5}$, а радиус вписанной в треугольник ABC окружности равен 1.

2. (мехмат 1992) На прямой l в пространстве взяты точки A, B и C так, что $AB = 10$ и $BC = 22$. Найти расстояние между прямыми l и m, если расстояния от точек A, B и C до прямой m равны 12, 13 и 20 соответственно.

3. (Московская математическая олимпиада, 1997, 10 класс) Существует ли выпуклое тело, отличное от шара, ортогональные проекции которого на некоторые три попарно перпендикулярные плоскости являются кругами?

4. (мехмат 1999) Три шара радиусов 1, 2 и 5 расположены так, что каждый из них касается двух других шаров и двух данных плоскостей. Найти расстояние между точками касания первого из этих шаров с плоскостями.

5. (олимпиада "Ломоносов", 2008) Основанием прямой призмы $ABCA'B'C'$ служит прямоугольный треугольник с катетами $AB = 3$ и $AC = 4$. Через середину бокового ребра $BB' = 10$ параллельно AC проведена прямая l. Какие значения может принимать площадь параллелограмма, у которого две вершины — точки A и B, а остальные две вершины лежат на прямых $A'C$ и l соответственно?

6. (мехмат 2000) Вершины квадрата $PQRS$ со стороной $25/4$ лежат на сфере. Параллельные друг другу прямые проходят через точки P, Q, R и S и повторно пересекают сферу в точках P_1, Q_1, R_1 и

S_1 соответственно. Известно, что $PP_1 = 2$, $QQ_1 = 10$, $RR_1 = 6$. Найти длину отрезка SS_1.

7. (мехмат 2000) Параллельные плоскости α и β делят тетраэдр $ABCD$ на три части так, что объем средней части меньше объемов каждой из крайних частей. Расстояния от точек A и B до плоскости α равны 15 и 10 соответственно. Расстояния от точек A и до плоскости β равны 10 и 8 соответственно. Найти отношение площадей сечений тетраэдра плоскостями α и β, если известно, что одно из этих сечений — трапеция, а расстояние от точки D до плоскости α меньше 12.

8. (Московская математическая олимпиада, 2008, 11 класс) Среди вершин любого ли многогранника можно выбрать четыре вершины тетраэдра, площадь проекции которого на любую плоскость составляет от площади проекции (на ту же плоскость) исходного многогранника: а) больше, чем $\frac{1}{4}$, б) не меньше, чем $\frac{1}{9}$, в) не меньше, чем $\frac{1}{7}$?